

UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS  
UFR SCIENCES

Ecole Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées  
Département d'Astrophysique

THESE

présentée pour obtenir le grade de  
Docteur en Sciences de l'Université de Nice-Sophia Antipolis  
Spécialité Sciences de l'Univers

par  
Tania REGIMBAU

ETOILES A NEUTRONS  
ET ONDES GRAVITATIONNELLES

soutenue publiquement le 6 septembre 2001 devant le jury composé de MM :

Julien BORGNINO, président

Sergio FRASCA, rapporteur

Remo RUFFINI, rapporteur

José Antonio de FREITAS PACHECO, directeur de thèse

Alain BRILLET, examinateur

Adalberto GIAZOTTO, examinateur

à 14h à la NEF de l'Observatoire de la Côte d'Azur, Nice



# Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier messieurs Julien Borgnino, Alain Brillet, Adalberto Giazotto, Sergio Frasca et Remo Ruffini d'avoir accepté d'être membres de mon jury de thèse et particulièrement les deux rapporteurs auprès de l'Université Sergio Frasca et Remo Ruffini.

Je remercie Julien Borgnino d'avoir exaucé l'un de mes souhaits les plus chers en m'acceptant au DEA d'astrophysique.

Je remercie José Antonio de Freitas Pacheco. Les mots me manquent pour exprimer tout mon respect, toute ma reconnaissance, toute mon amitié... J'ai eu la chance de rencontrer un scientifique exceptionnel et un être humain exceptionnel. Il m'a enseigné la rigueur dans mon travail et a su me guider avec patience et clairvoyance, m'encourageant toujours à donner le meilleur de moi même. En quittant maintenant quelques temps l'OCA, j'emporte comme des biens précieux ses conseils et la confiance que j'ai pu acquérir grâce à lui.

Je remercie tous les membres de l'équipe SAES au sein de laquelle j'ai effectué cette thèse : Jean Gay, Yves Rabbia, Jean Paul Scheidecker, Gilbert Reinisch, Djamel Mekarnia, Sébastien Dervaux, Pierre Cruzalebes. Merci à Jean Paul et à Gilbert pour leur bons conseils avant mon séjour au MIT.

Un grand merci à Alain Brillet pour m'avoir accueillie dans la collaboration VIRGO. Nous allons entrer dans l'ère de la détection des ondes gravitationnelles et c'est une grande chance de pouvoir participer à l'Aventure. Je remercie aussi tous les membre de l'équipe ILGA, en particulier Jean Yves Vinet, Nary Man, François Bondu pour la visite guidée de Cascina, Eric Chassande Mottin pour ses conseils et son aide.

Je remercie Duncan Lorimer, Matthew Bailes et Richard Manchester pour leurs conseils et leurs encouragements.

Je remercie tout les membres de l'Observatoire de Nice qui contribuent à créer cette ambiance si amicale et à faire de l'OCA un lieu de travail tellement privilégié.

Merci à Jean Michel Mercier, Serge Blanc, Pierre Somlyo et Jacques Postel pour leur disponibilité et leur patience. En particulier merci à Jean Michel

sans qui j'aurais eu beaucoup de mal à imprimer ce manuscrit dans les temps.

Merci à Patrick de Laverny d'avoir partagé son bureau, à Brett Gladman d'avoir corrigé mes fautes d'anglais.

Merci à Frederic Thévenin qui a eu la patience d'assister aux premiers essais de ma présentation de thèse.

Merci aussi à Muriel pour nos sorties tennistiques, à Sébastien, Gilles, Thomas, Hervé, Magali, Gaby, Dimitri...

Un grand merci à Fabien pour son amitié et son soutien. Il est aussi une mine d'informations sur tout ce qui concerne Linux.

Je remercie ma famille et en particulier mes parents qui m'ont toujours soutenue et encouragée. Merci aussi à ma petite Canelle pour la joie qu'elle m'apporte chaque jour.

*à ma grand mère,*

*“La Terre est bleue comme une orange”, Paul Eluard*



# Conventions et Notations

- $\langle X \rangle$  : moyenne de  $X$
- $\dot{X}, \ddot{X}$  : dérivées première et seconde de  $X$
- an: une année; j : un jour
- les vitesses sont des quantités algébriques. Par exemple, la vitesse de rotation différentielle de la Galaxie à la distance  $R$  du centre notée  $V_c(R_i)$  est telle que  $V_c(R_i) < 0$ .

## constantes

- vitesse de la lumière :  $c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$
- constante de gravitation :  $G = 6.67259 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$
- masse du Soleil :  $M_\odot = 2.8 \times 10^{33} \text{g}$
- constante de Hubble :  $H_o = 68 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} = 2.2 \times 10^{-18} \text{ cm s}^{-1} \text{m}^{-1}$

## nom des pulsars

Comme la plupart des sources astronomiques, les pulsars sont nommés d'après leur position dans le ciel. Jusqu'en 1990, on utilisait les coordonnées Besseliennes (avec l'année 1950 comme référence) et la convention était PSR hhmm±dd avec PSR pour Pulsating Source of Radio, hhmm pour l'ascension droite en heures et minutes et dd pour la déclinaison en degrés. Suivant les recommandations de l'IAU, les nouveaux pulsars sont nommés par rapport aux coordonnées Juliennes (avec l'année 2000 comme référence). Lorsque la précision le permet, la déclinaison est donnée en degrés et arc minutes d'où la convention PSR hhmm±ddmm. Pour éviter toute confusion entre les noms en coordonnées B1950 et J2000, on ajoute les préfixes B ou J (Taylor et al., 1993 [114]). Le premier pulsar découvert par Hewish et al. (1968)

s'appelle indifféremment PSR B1919+21 ou PSR J1921+2153 alors que les pulsars découverts après 1990 n'ont que la dénomination PSR J.

## propriétés des pulsars - valeurs canoniques

sauf mention contraire, nous utiliserons les notations et les valeurs numériques suivantes

- masse :  $M = 1.4 M_{\odot}$
- rayon :  $R = 10^6$  cm
- moment cinétique :  $I = 1.4 \times 10^{45}$  g cm<sup>2</sup>
- période :  $P$  en s
- dérivée de la période :  $\dot{P}$  s s<sup>-1</sup>
- champ magnétique :  $B$  en G

## vocabulaire

nous avons choisi de laisser en anglais certains mots faisant partie du jargon usuel “glitch”, “survey”, “burst”, viscosité “bulk”.

**Sauf mention contraire, le système d'unités utilisé dans ce manuscrit est le système cgs**



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Modèle des Pulsars Normaux de la Galaxie</b>	<b>17</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Généralités sur les Etoiles à Neutrons</b>	<b>21</b>
2.1	Historique . . . . .	21
2.2	Structure . . . . .	22
2.3	Evolution . . . . .	23
2.3.1	Formation . . . . .	23
2.3.2	Emission radio . . . . .	24
2.3.3	Freinage magnétique . . . . .	26
2.4	Pulsars Binaires et Millisecondes . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Propriétés Statistiques</b>	<b>29</b>
3.1	Catalogues . . . . .	29
3.2	Effets de Sélection . . . . .	30
3.3	Propriétés Observables . . . . .	31
3.4	Luminosité radio . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Modèle d'Evolution</b>	<b>43</b>
4.1	Théorie du Dipôle Magnétique en Rotation . . . . .	43
4.2	Modification au Modèle du Dipôle . . . . .	45
<b>5</b>	<b>synthèses de populations</b>	<b>49</b>
5.1	Code Numérique . . . . .	49
5.2	Résultats . . . . .	57
<b>II</b>	<b>Champ Magnétique</b>	<b>65</b>
<b>6</b>	<b>Introduction</b>	<b>67</b>

<b>7</b>	<b>Synthèses de Populations</b>	<b>71</b>
7.1	Modèle avec Distribution du Champ Magnétique . . . . .	71
7.2	Modèle avec Dissipation du Champ Magnétique . . . . .	76
7.3	Modèle avec Distribution et Dissipation du Champ Magnétique	78
7.4	Magnétars . . . . .	83
<b>III</b>	<b>Emission Gravitationnelle</b>	<b>87</b>
<b>8</b>	<b>Introduction</b>	<b>89</b>
<b>9</b>	<b>Théorie des Ondes Gravitationnelles</b>	<b>91</b>
9.1	Cadre de la Relativité Générale . . . . .	91
9.2	Ondes Gravitationnelles . . . . .	92
9.3	Etoiles à Neutrons en Rotation . . . . .	94
<b>10</b>	<b>Détecteurs d'Ondes Gravitationnelles</b>	<b>103</b>
10.1	Effet des Ondes Gravitationnelles . . . . .	103
10.2	Antennes Résonantes . . . . .	103
10.3	Antennes Interférométriques . . . . .	105
10.3.1	Projet VIRGO . . . . .	105
10.3.2	Autres projets . . . . .	107
10.3.3	Projet spatial LISA . . . . .	108
10.4	Sources . . . . .	108
10.5	Réponse d'un Détecteur Interférométrique . . . . .	109
<b>11</b>	<b>Contribution des Pulsars au Rayonnement Gravitationnel</b>	<b>113</b>
11.1	Recherche Individuelle . . . . .	114
11.1.1	Etude statistique de la population détectable par VIRGO	116
11.2	Recherche Quadratique . . . . .	120
<b>IV</b>	<b>Fond de Rayonnement Stochastique</b>	<b>127</b>
<b>12</b>	<b>Introduction</b>	<b>129</b>
<b>13</b>	<b>Contributions Astrophysiques</b>	<b>131</b>
13.1	Pulsars en rotation . . . . .	132
13.1.1	Densité spectrale d'énergie individuelle . . . . .	132
13.1.2	Taux de formation . . . . .	133
13.1.3	Fond de rayonnement stochastique . . . . .	136
13.2	Instabilités Initiales . . . . .	139

13.2.1	Instabilités de Chandrasekhar-Friedman-Schutz (CFS)	139
13.2.2	Modes “r”	139
13.2.3	Modes barre	149
13.3	Coalescences de Binaires NS/NS	157
13.3.1	Modèle	157
13.3.2	Taux de coalescence	158
13.3.3	Densité spectrale d’une source	161
13.3.4	Fond de Rayonnement Stochastique	162
13.4	Bilan des résultats	163
<b>14</b>	<b>Détection du fond de rayonnement Stochastique</b>	<b>169</b>
14.1	Définitions	169
14.1.1	“Overlap Reduction Function”	169
14.1.2	Densité spectrale du bruit	174
14.2	Détectabilité du Fond Stochastique Astrophysique	174
<b>15</b>	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>177</b>
15.1	Conclusions	177
15.2	Perspectives	180
<b>A</b>	<b>Corrélations : Angles d’Orientations</b>	<b>197</b>



# Résumé

Nous présentons des synthèses de populations permettant de retrouver les propriétés statistiques de la population réelle des pulsars radio galactiques à partir de l'échantillon observé biaisé par des effets de sélection. Nous confirmons que les étoiles à neutrons ne naissent pas en majorité comme des rotateurs rapides et que le champ magnétique ne subit pas de dissipation notable pendant la phase pulsar. La connaissance de la population totale nous permet d'une part d'étudier la sous-population des magnétars et d'autre part de modéliser la contribution des pulsars à l'émission gravitationnelle (galactique et extra-galactique) et d'en déduire sa détectabilité par les antennes interférométriques comme VIRGO. La connaissance des propriétés statistiques de la population détectable par VIRGO nous permet d'optimiser la recherche individuelle dans l'espace des paramètres (fréquences et directions du ciel). Quant au fond de rayonnement gravitationnel stochastique d'origine astrophysique, nous montrons qu'il pourrait être détecté dès la deuxième génération d'interféromètres en corrélant entre eux deux détecteurs.



# Abstract

We present population synthesis aiming to recover the statistical properties of the real population of galactic radio pulsars, biased by selection effects. We confirm that neutron stars are not born in majority as fast rotators and that the magnetic field don't decay significantly during pulsar life. The knowledge of the total pulsar population permits us to study the magnetar sub-population, and also to model the pulsar contribution to the gravitational emission (galactic and extra-galactic) and to deduce its detectability by laser beam interferometers like VIRGO. The knowledge of the detectable population statistical properties permits us to optimize the search for individual sources in the parameter space (frequency and sky directions). Concerning the astrophysical stochastic background, we show that it would be detected as early as the interferometers second generation, by correlating two detectors.





## Première partie

# Modèle des Pulsars Normaux de la Galaxie

# Chapitre 1

## Introduction

Lorsque l'on s'intéresse aux pulsars on est confronté à un problème majeur : à cause d'un certain nombre de facteurs de sélection, la population que l'on observe n'est pas représentative de la population réelle. Les “synthèses de populations” peuvent être une solution au problème. En effet, si l'on dispose d'un modèle d'évolution, les méthodes numériques de Monte Carlo permettent de générer des populations “réelles” de pulsars. En introduisant les facteurs de sélection, on obtient alors les distributions des propriétés physiques de la population observable et il suffit de les comparer aux observations pour tester la validité du modèle et définir ses paramètres.

Gunn et Ostricker (1970) [47] ont été les premiers à utiliser les “synthèses de populations de pulsars”. Ils disposaient à l'époque d'un catalogue de 41 objets seulement. Depuis, d'autres études ont été menées et les modèles deviennent plus complets au fur et à mesure que l'on découvre de nouveaux objets et que l'on avance dans l'étude théorique des étoiles à neutrons. Malgré cela, certains aspects restent difficiles à expliquer. Si l'on considère qu'un pulsar subit un freinage de type dipolaire magnétique, comment expliquer que les quatre valeurs observées de l'indice de freinage soient toutes inférieures à la valeur canonique 3 ? Si comme le suggèrent les dernières études la période initiale des pulsars doit être de l'ordre de 100 ms comment expliquer la rotation très rapide du pulsar du Crabe ?

Nous présentons ici de nouvelles synthèses de populations. Notre étude statistique tient compte des données du catalogue réactualisé des pulsars et notre modèle d'évolution s'appuie sur des résultats théoriques récents sur les étoiles à neutrons. Nous introduisons une modification au modèle canonique de freinage dipolaire magnétique de façon à prendre en compte l'éventuelle migration du dipôle par rapport à l'axe de rotation suggérée par Link et al. (1998) [69]. Cette modification permet d'expliquer de façon naturelle les valeurs observées de l'indice de freinage. Par ailleurs, nous considérons que la

période initiale des pulsars et son champ magnétique n'ont pas des valeurs fixes mais sont distribués selon des lois normale et log-normale. Cette hypothèse permet de rendre compte non seulement de la rotation très rapide du pulsar du Crabe mais aussi de la distribution du champ magnétique sans qu'il soit nécessaire d'invoquer un quelconque processus de dissipation.

Connaissant les paramètres du modèle, nous pouvons simuler la population réelle des pulsars. La connaissance de la population totale nous permettra, d'une part d'étudier les magnétars, des étoiles à neutrons avec un champ magnétique très élevé ( $B > 10^{14}$  G) (partie II) et d'autre part, de calculer la contribution des pulsars à l'émission gravitationnelle galactique (partie III) et extragalactique (partie IV).

# Chapitre 2

## Généralités sur les Etoiles à Neutrons

Nous n'avons pas l'ambition de faire de ce chapitre une encyclopédie des étoiles à neutrons. Nous nous contenterons de passer en revue leurs principales caractéristiques et aussi d'introduire les notions dont nous avons besoin pour notre étude. Pour certains aspects mal connus ou sujets à controverse, nous avons choisi de présenter le modèle considéré comme “standard” au moment où nous rédigeons cette thèse.

### 2.1 Historique

En 1934, les astronomes Walter Baade et Fritz Zwicky [5] avancèrent l'idée qu'une supernova pouvait représenter la transition entre une étoile ordinaire et une “étoile à neutrons”, un corps de très petites dimensions, extrêmement dense et constitué principalement de neutrons. Le concept d'étoile à neutrons aurait pu rester purement théorique si trente ans plus tard, la découverte des pulsars n'avait pas apporté la confirmation de leur existence.

En 1968, Jocelyn Bell [53] alors jeune étudiante en radioastronomie à Cambridge, découvrit tout à fait par hasard le premier pulsar ; toutes les 1.337 secondes, elle enregistrait une impulsion radio très brève et très intense. A l'époque, le groupe de Cambridge dirigé par Anthony Hewish étudiait la scintillation des sources radio appelées quasars. A cause de la turbulence du gaz ionisé interplanétaire, ces sources montrent des fluctuations d'intensité aléatoires dont se distingue totalement la parfaite régularité du rayonnement des pulsars. Par ailleurs, l'émission ne pouvait pas être d'origine terrestre puisqu'elle provenait toujours du même point de la sphère céleste. Très vite, trois autres pulsars furent découverts. Les impulsions radio étaient si régulières que

les astrophysiciens pensèrent d’abord qu’il s’agissait d’un signal codé envoyé par une civilisation extraterrestre. C’est pourquoi, à la conférence au cours de laquelle ils annoncèrent leur découverte, J.Bell et A.Hewish baptisèrent les quatre premiers pulsars LGM1, 2.4, LGM comme “Little Green Man”.

Le phénomène de pulsar demeura un certain temps énigmatique mais, rapidement, plusieurs hypothèses furent avancées pour expliquer la stabilité remarquable des impulsions radio. Parmi elles, les vibrations radiales d’une étoile et le mouvement d’une étoile autour d’une autre furent vite exclus après la découverte de pulsars de périodes très courtes. Finalement, Pacini (1967) [92] et Gold (1968) [43] proposèrent que les émissions radio provenaient d’un point source d’une étoile en rotation et que la période des impulsions correspondait à la période de rotation de l’étoile. Cette hypothèse était valable à condition d’admettre que l’étoile était une étoile à neutrons. En effet, pour tourner aussi rapidement, elle doit être de très petite taille et pour avoir une période de rotation aussi stable, elle doit être très massive. Par ailleurs, il faut que sa densité soit celle de la matière nucléaire pour que la gravitation compense les énormes forces centrifuges mises en jeu. Enfin, seul un champ magnétique d’une intensité exceptionnelle permet la présence d’une magnétosphère autour de l’étoile à neutrons ; et comme nous le verrons plus loin, celle-ci est indispensable pour que le pulsar rayonne (Goldreich et Julian, 1969 [44]) .

## 2.2 Structure

Le rayon typique d’une étoile à neutrons est de 10 km et l’on estime sa masse à environ  $1.4 M_{\odot}$ . Les travaux récents de Thorsett et Chakrabarty (1999) [119] confirment cette estimation. Ils ont recensé les masses de vingt et un pulsars radio binaires et obtenu une distribution gaussienne de moyenne  $1.35 M_{\odot}$  et de dispersion  $0.04 M_{\odot}$ .

La matière qui constitue une étoile à neutrons n’est pas homogène mais est de plus en plus dense de la croûte jusqu’au centre. La croûte externe est composée de noyaux de fer formant un réseau cubique à faces centrées en équilibre avec un gaz d’électrons dégénéré. L’énergie d’interaction coulombienne entre les noyaux de fer étant très élevée (environ 1 MeV par noyau), elle confère à la croûte une très forte rigidité. Au dessous de la couche externe, la densité devient plus élevée entraînant une augmentation de l’énergie de Fermi. Des électrons sont alors capturés par les noyaux de fer qui s’enrichissent en neutrons tout en gardant leur structure de réseau cubique à faces centrées. Dans cette région appelée couche interne, l’énergie de Fermi est suffisamment élevée pour que les noyaux de fer commencent à libérer des

neutrons ; la concentration en noyaux atomiques lourds diminue alors avec la profondeur et l'état de la matière devient un superfluide de neutrons dégénérés lorsque la densité atteint environ  $3 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ . Sous la couche interne et jusqu'au centre de l'étoile, la matière est composée d'un superfluide de hadrons, essentiellement des neutrons mais aussi des protons supraconducteurs, des électrons dégénérés et même des hypérons lorsque la densité atteint  $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ . Enfin, au coeur même de l'étoile, l'état de la matière peut être sous certaines conditions, un fluide de quarks. De Freitas Pacheco et al. (1993) [29] ont montré que la dimension du coeur de quarks dépend de la constante de couplage de l'interaction forte  $\alpha_c$ . Le rayon du coeur diminue lorsque la constante  $\alpha_c$  augmente et pour une valeur critique de 0.45, le coeur de quarks disparaît et seul subsiste un coeur composé uniquement de hadrons. Pour des valeurs particulières de la constante  $\alpha_c$ , ces chercheurs ont établi la masse maximale que pouvait avoir une étoile à neutrons et obtenu qu'elle est toujours supérieure à la plus grande masse connue pour les pulsars.

## 2.3 Evolution

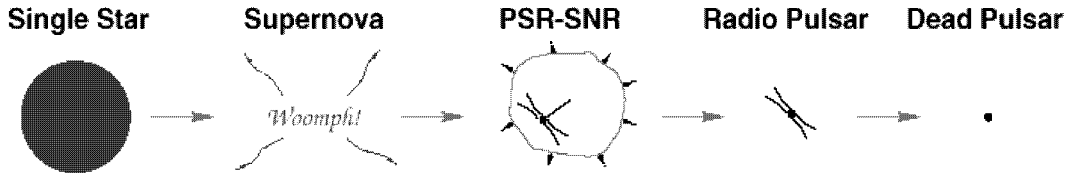


FIG. 2.1: scénario d'évolution d'un pulsar isolé

### 2.3.1 Formation

Lorsqu'une étoile de vingt à quarante masses solaires a brûlé tout son combustible nucléaire en synthétisant des éléments de plus en plus lourds de l'hélium jusqu'au fer, plus aucune force de pression ne s'oppose à la force de gravitation et le coeur commence à s'effondrer, devenant un gaz d'électrons dégénéré. Si la masse du coeur est supérieure à la limite de Chandrasekhar,

$$M_c \sim \left(\frac{hc}{2\pi G}\right)^{3/2} \left(\frac{Z}{A}\right) \frac{1}{m_N^2} \quad (2.1)$$

(où  $h$  est la constante de Planck,  $G$  la constante de gravitation,  $c$  la vitesse de la lumière et  $m_N$  la masse du nucléon) la pression de dégénérescence des électrons (qui assure l'équilibre hydrostatique au sein des naines blanches) ne suffit pas à contrebalancer le collapse. Les électrons devenus relativistes pénètrent dans les noyaux atomiques pour donner des neutrons ( $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ ) et les neutrinos issus de ces réactions s'échappent très vite. Les neutrons ne se repoussant pas électroniquement comme les protons, la densité du coeur approche alors celle de la matière nucléaire. A ce stade, le libre parcours moyen des neutrinos devient inférieur aux dimensions de l'étoile et leur absorption par les couches externes est suffisamment importante pour transférer une quantité de mouvement capable d'inverser le collapse de l'enveloppe en une explosion. Si les forces de pression du gaz dégénéré de neutrons suffisent à contrebalancer le collapse du coeur, le résidu de la supernova est une étoile à neutrons. Elle est en rotation très rapide, par conservation du moment cinétique, et son champ magnétique est très intense, par conservation du flux magnétique.

Ajoutons que si l'explosion n'est pas symétrique, l'étoile à neutrons subit une impulsion et s'échappe des restes de la supernova (SNR) sur une échelle de temps d'environ 100 kan. Pour cette raison, seuls quelques pulsars (PSR) très jeunes comme ceux des nébuleuses du Crabe (explosion en 1054), de Gum (explosion il y a 30 kan), de Vela et du Cygne sont associés à des SNR. Le catalogue de Taylor et al. (1995) [114] compte 12 associations PSR/SNR pour environ 700 pulsars.

### 2.3.2 Emission radio

Après la supernova et pendant une période d'environ 20–100 Man, l'étoile à neutrons est dans sa phase "pulsar". Elle est en rotation suffisamment rapide (entre quelques millisecondes et une dizaine de secondes) pour émettre un rayonnement radio observable sous la forme d'impulsions très brèves pendant une courte fraction de la période 1 – 5%. Le mécanisme à l'origine des impulsions radio est complexe et encore assez mal connu. Néanmoins, on peut formuler l'idée de base de la façon suivante. La matière qui constitue l'étoile à neutrons est tellement dense qu'on a longtemps pensé que les pulsars étaient entourés de vide. Mais les travaux de Goldreich et Julian (1969) [44] ont montré que dans la mesure où l'étoile tourne très vite, les forces électriques induites par l'intense champ magnétique sont beaucoup plus importantes que les forces de gravitation. Elles arrachent de la surface de l'étoile des particules légères (principalement des électrons) qui sont ensuite accélérées et spiralent le long des lignes de champ magnétique. Au niveau de la calotte polaire, dans la région des lignes de champ ouvertes autour de l'axe magné-

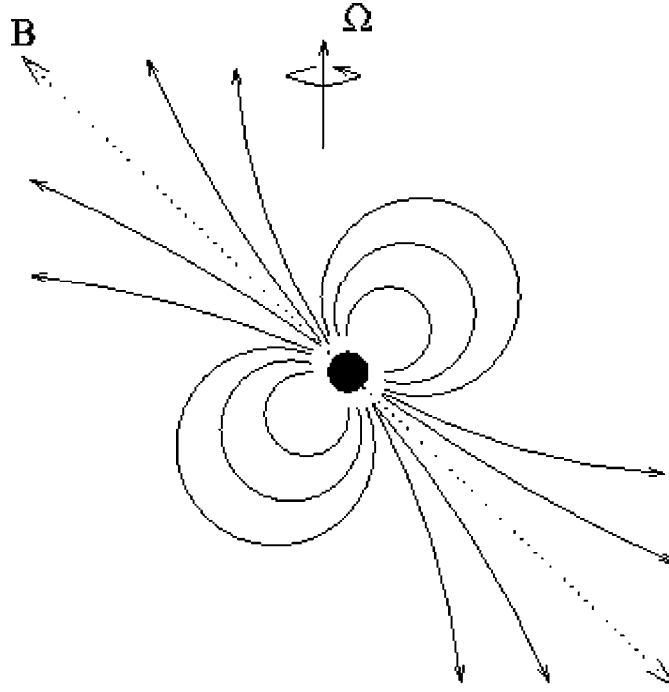


FIG. 2.2: modèle du dipôle magnétique en rotation. Au centre l'étoile à neutrons d'où s'écartent les lignes de champ magnétique.

tique (Ruderman et Sutherland, 1975 [101]), les électrons peuvent s'échapper, créant un cône d'émission radio (figure 2.2). Si l'axe magnétique n'est pas aligné avec l'axe de rotation, le cône balaie l'espace à la manière d'un phare et un observateur reçoit une impulsion à chaque tour de rotation de l'étoile si le faisceau passe dans sa direction (figure 2.3). L'intensité du rayonnement

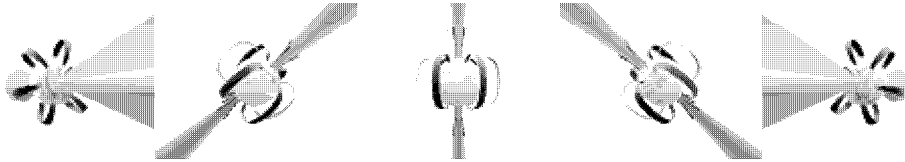


FIG. 2.3: modèle du phare tournant

radio observé ne peut s'expliquer que par l'émission cohérente de paquets d'électrons mais il n'existe pas à l'heure actuelle de consensus quant au mécanisme d'émission (cyclotron, synchrotron, compton inverse, amplification maser...) ni quant à la formation de ces paquets.



Des rayonnements de plus hautes énergies (optiques, X ou Gamma) peuvent se produire chez de jeunes pulsars, dans la région où la magnétosphère en co-rotation avec l'étoile atteint une vitesse proche de celle de la lumière. A cette distance de l'axe de rotation, les particules, complètement relativistes, rayonnent dans un cône très étroit. En effet, selon la théorie de la relativité, une source en mouvement (même si elle émet de façon isotrope), paraît rayonner dans la direction de sa trajectoire et celle-ci est circulaire autour de l'axe de rotation pour des électrons de la magnétosphère du pulsar.

### 2.3.3 Freinage magnétique

A l'exception de quelques pulsars réaccélérés dans des systèmes binaires, tous les pulsars connus ralentissent et l'on observe une augmentation de la période de leurs impulsions radio (qui est aussi la période de rotation de l'étoile). Le processus responsable de ce freinage est probablement d'origine magnétique. En première approche, un pulsar peut être vu comme un dipôle magnétique en rotation c'est à dire comme un gigantesque aimant dont les lignes de champ s'écartent en éventail d'un pôle pour se rejoindre au pôle opposé. Au delà de la région du cylindre lumière (le rayon du cylindre lumière est la distance à laquelle une particule en co-rotation avec le pulsar atteindrait la vitesse de la lumière), les champs électriques et magnétiques varient rapidement générant des ondes électromagnétiques. Celles-ci sont responsables du freinage du pulsar puisqu'elles se propagent vers l'extérieur en emportant une partie de l'énergie de rotation. Lorsque la rotation n'est plus assez rapide (pour des périodes de quelques secondes), l'émission radio cesse et le pulsar n'est plus observable.

## 2.4 Pulsars Binaires et Millisecondes

Le scénario d'évolution que nous venons de décrire concerne les pulsars radio isolés de la Galaxie, appelés aussi "pulsars normaux", qui constituent la grande majorité de la population observée. Ce sont des objets jeunes (ils ont moins d'une centaine de millions d'années) concentrés dans le disque de la Galaxie. Leur période de rotation s'étend de quelques dizaines de millisecondes à quelques secondes et leur champ magnétique est typiquement de  $10^{12}$  Gauss. On connaît cependant deux autres populations que l'on observe en nombre important dans les amas globulaires : les pulsars binaires et les pulsars ultra-rapides (appelés aussi pulsars millisecondes). Outre leur position dans la Galaxie, ils présentent des propriétés particulières qui les distinguent des pulsars du disque : ils sont rapides, vieux, ralentissent très

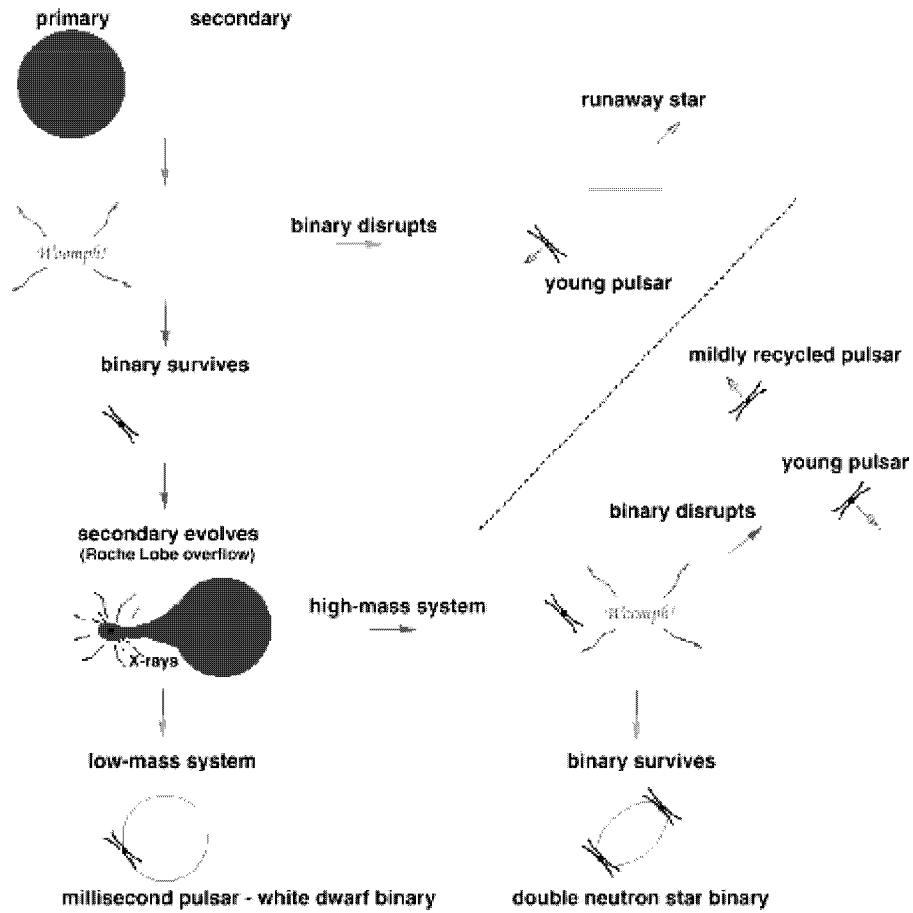


FIG. 2.4: scénarios d'évolution possibles pour un pulsar né en système binaire

lentement et sont faiblement magnétiques.

Leur période est extrêmement courte, de l'ordre de la milliseconde. Avant la découverte du premier pulsar ultra-rapide (PSR B1937+21) de période 1.5 ms (Backer et al., 1982 [6]), le pulsar le plus rapide que l'on connaissait était celui du Crabe (PSR B0531+21) qui tourne environ vingt fois moins vite avec une période de 33.4 ms. Si la courte période de rotation de PSR B0531+21 est associée à sa jeunesse (il est né de la supernova de 1054), il ne peut pas en être de même pour les pulsars ultra-rapides. En effet, aucune association SNR/PSR analogue à celle de la nébuleuse du Crabe n'est observée, et on en conclut que leur âge est plus élevé. D'autre part, le taux de ralentissement des pulsars ultra-rapides est extrêmement faible. Alors que la période de PSR B0531+21 augmente d'un centième de milliseconde chaque année, celle des pulsars ultra-rapides est plus stable que les meilleures horloges atomiques à césium qui servent d'étalon de temps (par exemple, la période de PSR1937+21 n'augmente que de trois millisecondes par million d'années). La dérivée de la période est proportionnelle à la vitesse de rotation et au carré du champ magnétique ( $\dot{P} \propto P^{-1} B^2$ , voir par exemple Manchester et Taylor, 1977 [81]). Les pulsars millisecondes tournant très vite, leur faible taux de ralentissement ne peut être dû qu'à un champ magnétique lui aussi très faible, de l'ordre de  $10^9$  G au lieu de  $10^{12}$  G pour les pulsars "normaux".

Il est maintenant admis qu'un pulsar ultra-rapide naît d'un système binaire de deux étoiles massives selon le scénario d'évolution proposé par Srinivasan et Van den Heuvel (1982) [107] (figure 2.4). L'étoile la plus massive explose la première en supernova et donne naissance à un pulsar radio. Lorsque la seconde étoile arrive à son tour en fin d'évolution, elle devient une géante rouge, remplit son lobe de Roche et de la matière est transférée sur l'étoile à neutrons compagnon qui est ainsi réaccélérée. A ce niveau, plusieurs scénarios sont possibles.

Le premier concerne les systèmes binaires où l'étoile compagnon n'est pas assez massive pour exploser en supernova mais devient une naine blanche. Dans ce cas, son évolution est plus lente et l'accrétion de matière dure suffisamment longtemps pour que le pulsar soit réaccéléré jusqu'à des périodes inférieures à 10 – 20 ms. Par contre, lorsque la seconde étoile est assez massive, elle explose à son tour rapidement en supernova. Le pulsar n'est alors que partiellement réaccéléré jusqu'à des périodes supérieures à 30 ms. Si les deux étoiles restent liées après l'explosion, on a un système binaire d'étoiles à neutrons (NS/NS) composé d'un pulsar réaccéléré et d'un pulsar radio jeune. L'exemple classique est PSR B1913+16, un pulsar radio "recyclé" de période 59 ms découvert par Hulse et Taylor en 1975. Mais en général, le système binaire ne survit pas à l'explosion et l'on obtient deux pulsars isolés dont l'un est un pulsar vieux, partiellement recyclé.

# Chapitre 3

## Propriétés Statistiques

### 3.1 Catalogues

Des radiotélescopes suffisamment sensibles pour détecter les pulsars existent depuis 1950 mais ils étaient réservés à l'observation du système solaire. C'est donc avec un radiotélescope destiné à l'étude de la scintillation interplanétaire que Jocelyn Bell (1968) [53] de Cambridge découvrit par hasard le premier pulsar.

Depuis, de nombreux grands télescopes situés en divers points de la Terre inspectent systématiquement le ciel à la recherche de nouveaux signaux périodiques caractéristiques des pulsars. Les sites d'observations les plus importants sont Molonglo, Jodrell Bank, Arecibo, Green Bank pour l'hémisphère nord et Parkes pour l'hémisphère sud. Chaque observatoire a pu dresser un catalogue recensant les pulsars détectés, leur position dans la Galaxie et certaines de leurs propriétés physiques directement observables (comme la période, sa dérivée et le flux) ou déductibles des observations (comme le champ magnétique, l'âge magnétique et la luminosité radio). La plupart des objets ont été observés autour de 400 MHz et beaucoup sont présents dans le catalogue de Taylor et al. (1995) [114]. Pour notre étude, nous avons complété ce catalogue avec les dernières données du Parkes Southern Survey (Lyne et al., 1998 [76]) et de Jodrell Bank (Lorimer et al., 1995 [71]). Depuis 1997, les radiotélescopes de Parkes et de Jodrell Bank ont entrepris de balayer toutes les régions du ciel à des fréquences plus élevées (autour de 1500 MHz) dans le cadre du Multibeam Survey. L'objectif est d'augmenter la sensibilité aux pulsars rapides ainsi qu'aux objets de forte mesure de dispersion comme ceux situés dans le disque de la Galaxie. Les résultats du Multibeam Survey n'étant encore que partiels nous ne pouvons malheureusement pas les utiliser pour le moment.

## 3.2 Effets de Sélection

On connaît aujourd’hui environ 1200 pulsars mais la majeure partie de la population nous est cachée par un certain nombre de facteurs de sélection.

Un effet de sélection, contre lequel nous ne pourrions malheureusement jamais rien, concerne le cône d’émission : un pulsar ne peut être détecté que si le faisceau radio passe en direction de la Terre. La fraction du ciel balayée par ce faisceau ou “beaming fraction” dépend de l’orientation de l’axe du dipôle par rapport à l’axe de rotation et de l’angle d’ouverture du cône d’émission. En première approximation, on peut considérer que l’orientation du dipôle est aléatoire et que l’angle d’ouverture est de l’ordre de  $10^\circ$ . Mais des études plus poussées ont montré que la “beaming fraction” était plus importante pour les pulsars de faibles périodes (Narayan et Vivekanand ,1983 [89] ; Lyne et Manchester, 1988 [75] ; Biggs, 1990 [11] ; Tauris et Manchester, 1998 [112]). Tous les modèles prévoient qu’une augmentation de la période s’accompagne d’une décroissance de la “beaming fraction” mais il n’existe actuellement pas de consensus quant à la relation “beaming fraction”/période.

Le facteur de sélection le plus “contrariant” est imposé par les limites techniques des radiotélescopes ; un pulsar ne peut être détecté que si le flux reçu est supérieur au seuil de sensibilité de l’antenne. Cet effet de sélection introduit des biais importants dans la population observée ; le flux étant proportionnel à la luminosité radio et inversement proportionnel au carré de la distance, elle est dominée par les pulsars les plus proches et/ou les plus lumineux.

Le flux minimal détectable est donné par (voir par exemple Manchester et al., 1996 [80]) :

$$S_{min} = A_0(T_r + T_{sky})\left[\frac{W}{(P - W)}\right]^{1/2} \quad (3.1)$$

où  $P$  est la période et  $W$  la largeur effective de la pulsation.

$T_r$  représente le bruit du récepteur,  $T_{sky}$  est la température de fond du ciel dans la direction de la ligne de visée et  $A_0$  une constante de normalisation qui dépend des caractéristiques de l’antenne :

$$A_0 = \frac{\alpha\beta}{G\sqrt{N_p\Delta\nu t_{int}}} \quad (3.2)$$

Dans cette expression,  $\alpha$  est le rapport signal à bruit,  $\beta$  un facteur qui prend en compte les processus de perte,  $G$  le gain de l’antenne,  $N_p$  le nombre de polarisations,  $\Delta\nu$  la largeur de la bande de fréquence et  $t_{int}$  le temps d’intégration.

La pulsation détectée (effective) est plus large que la pulsation émise (intrinsèque) et s’écrit (Narayan, 1987 [87]) :

$$W^2 = W_e^2 + \tau_{scatt}^2 + \tau_{DM}^2 + \tau_{samp}^2 \quad (3.3)$$

où  $W_e$  représente la largeur intrinsèque de la pulsation c’est à dire environ 4% de la période. Les termes suivants sont les sources d’élargissement.

La première contribution  $\tau_{scatt}$  est due à la diffusion du signal qui interagit avec les électrons du milieu interstellaire. Les rayons empruntent des trajets différents, nous parviennent avec des temps de retard différents et il en résulte un élargissement de la pulsation détectée.

Un autre phénomène dont il faut tenir compte est la dispersion du signal à la traversée du milieu interstellaire,  $\tau_{DM}$ . Les composantes spectrales du rayonnement ne se propagent pas à la même vitesse et nous arrivent décalées dans le temps : plus la fréquence est basse et plus le trajet est long.

La différence entre les temps d’arrivée des fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$  est proportionnelle au rapport  $\frac{\Delta\nu}{\nu}$  où  $\nu$  est la fréquence centrale et où  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ . C’est pour cette raison que dans le cadre du Multibeam Survey on a choisi d’observer à des fréquences élevées (1500 MHz au lieu de 400 MHz). Une autre manière de minimiser l’effet de la dispersion consiste à utiliser la technique dite de “de-dispersion”. Il s’agit de diviser la bande de fréquence du récepteur en un certain nombre de canaux étroits et d’appliquer le temps de retard adéquat à chaque canal avant de recombinaison le signal.

La limite de résolution du récepteur introduit une dernière composante à l’élargissement de la pulsation, en fait l’intervalle d’échantillonnage effectif  $\tau_{samp}$ .

Ajoutons que l’expression (3.1) est valable si  $P > W$  : quand la largeur de la pulsation détectée  $W$  est supérieure à la période, le pulsar n’est pas détectable en tant que source périodique.

Enfin, pour qu’il puisse être détecté, un pulsar doit être situé dans une région du ciel couverte par un radio télescope. Nous devrions “bientôt” être affranchis de cet effet de sélection, le Multibeam Survey ayant pour objectif de balayer l’ensemble du ciel.

### 3.3 Propriétés Observables

Notre étude ne concernant que les pulsars normaux de la Galaxie, nous avons exclu du catalogue les pulsars binaires, millisecondes et ceux que nous soupçonnons d’avoir été réaccélérés dans des systèmes binaires massifs. Nous avons aussi écarté les objets pour lesquels nous n’avons pas toutes les données. Finalement, notre catalogue compte 491 pulsars tous observés autour

de 400 MHz au cours des survey d'Arecibo (1, 2, 3 ou 4), de Molonglo, de Green Bank (1, 2 ou 3), de Jodrell Bank ou de Parkes 70.

Nous présentons par la suite certaines propriétés statistiques de la population observable, déduites de notre catalogue, et dont nous avons besoin pour notre étude.

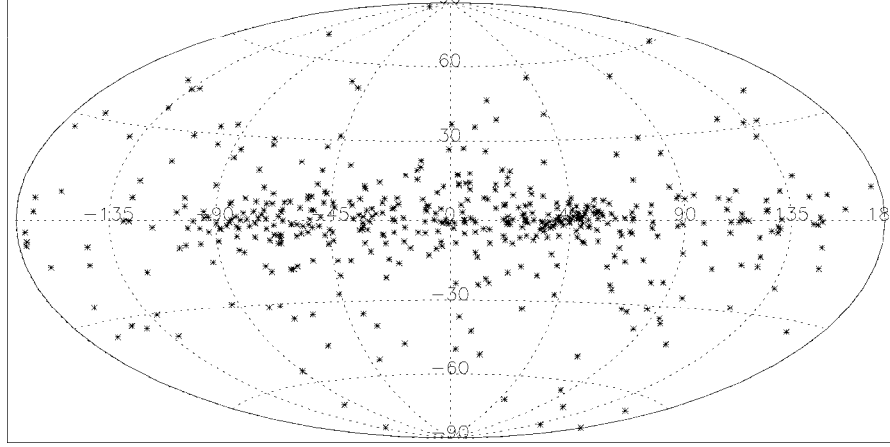


FIG. 3.1: distribution dans le ciel de 491 pulsars normaux en coordonnées galactiques ( $l$ ,  $b$ ). La concentration dans le plan de la Galaxie est évidente

Les observations permettent d'obtenir directement les coordonnées galactiques (longitude  $l$  et latitude  $b$ ) des pulsars. La figure (3.1) représente la projection de la population dans le diagramme de Hammer Aitkoff. Comme l'atteste la distribution sur la sphère céleste, elle est essentiellement concentrée dans le plan de la Galaxie en accord avec l'idée que les pulsars sont des étoiles à neutrons. Ils naissent d'étoiles massives dont l'évolution est très rapide et la population observée est constituée d'objets jeunes du disque de la Galaxie.

La distance des pulsars, en revanche, n'est pas accessible directement mais peut être estimée par une mesure de dispersion. La méthode consiste à mesurer l'écart entre les temps d'arrivée d'impulsions radio de fréquences différentes. Cet écart produit par la dispersion des ondes radio à la traversée du milieu ionisé interstellaire est d'une part proportionnel à l'intégrale sur la ligne de visée de la densité d'électrons et d'autre part inversement propor-

tionnel à la fréquence radio (voir par exemple Manchester et Taylor, 1977 [81]).

$$t_2 - t_1 = \frac{e^2}{2\pi mc} \left( \frac{1}{\nu_2^2} - \frac{1}{\nu_1^2} \right) \int_0^d n_e dl \quad (3.4)$$

où  $e$  est la charge de l'électron,  $m$  sa masse,  $c$  la vitesse de la lumière,  $\nu_1$  et  $\nu_2$  des fréquences radio,  $n_e$  la densité électronique et  $d$  la distance du pulsar au Soleil.

La constante de dispersion est une quantité directement mesurable donnée par :

$$D = \frac{(t_2 - t_1)}{\left( \frac{1}{\nu_2^2} - \frac{1}{\nu_1^2} \right)} \quad (3.5)$$

et la mesure de dispersion  $DM$  est liée à  $D$  par la relation :

$$DM = \frac{2\pi mc}{e^2} D \quad (3.6)$$

La distance du pulsar s'écrit alors :

$$d = \frac{DM}{\langle n_e \rangle} \quad (3.7)$$

L'estimation de la distance à partir de la mesure de dispersion nécessite une bonne connaissance de la distribution des électrons libres dans la Galaxie. Le modèle le plus précis dont nous disposons actuellement a été développé par Cordes et al. (1991) [24] et revu par Taylor et Cordes (1993) [113]. Selon ces auteurs, il permet d'estimer la distance avec une précision d'au moins 25%. C'est un modèle à deux composantes, où la densité électronique décroît avec la hauteur en  $\text{sech}^2(\frac{z}{h})$ . La première composante, dite "externe" a une densité électronique constante dans le plan,  $n_1 = 0.025 \text{ cm}^{-3}$  et une échelle de hauteur  $h_1 = 1 \text{ kpc}$ . La seconde composante dite "interne" est un anneau avec une densité maximale  $n_2 = 0.02 \text{ cm}^{-3}$  à 3.5 kpc du centre. L'échelle de hauteur est  $h_2 = 0.15 \text{ kpc}$ . Le modèle de 1993 tient aussi compte des quatre bras spiraux de la Galaxie et de la nébuleuse de Gum.

Les figures (3.2) et (3.3) sont respectivement la distribution des pulsars projetée dans le plan galactique et la distribution en fréquence de la distance des pulsars à la Terre. Elles illustrent bien l'effet de sélection dû au flux : le rayonnement reçu d'un pulsar trop éloigné de la Terre étant trop faible pour être détecté, la plupart des objets observés sont fortement concentrés dans un rayon de 5 kpc autour du Soleil.



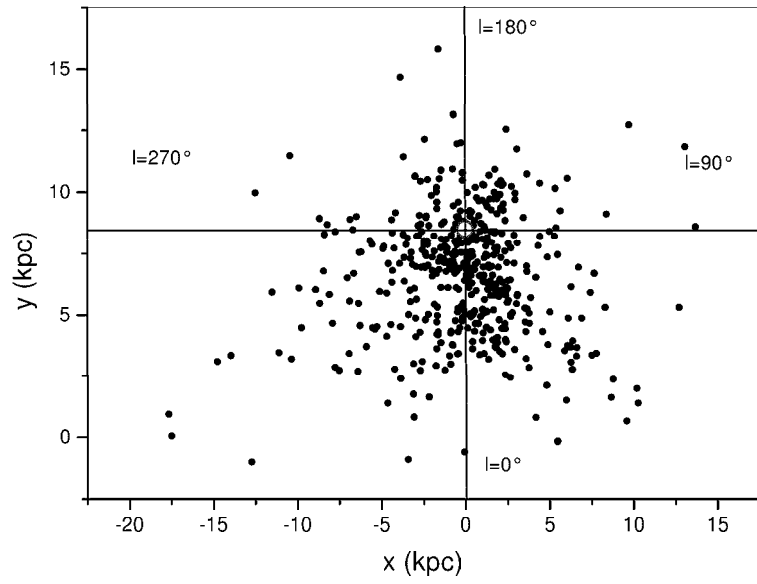


FIG. 3.2: position de 491 pulsars normaux projetée dans le plan de la Galaxie. Les pulsars observés sont concentrés autour du Soleil (cercle) supposé distant de 8.5 kpc du centre galactique.

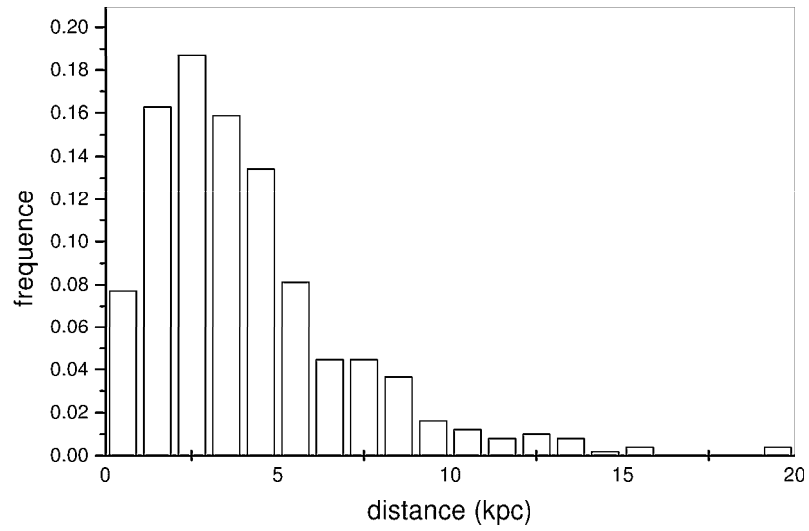


FIG. 3.3: distance héliocentrique pour 491 pulsars normaux

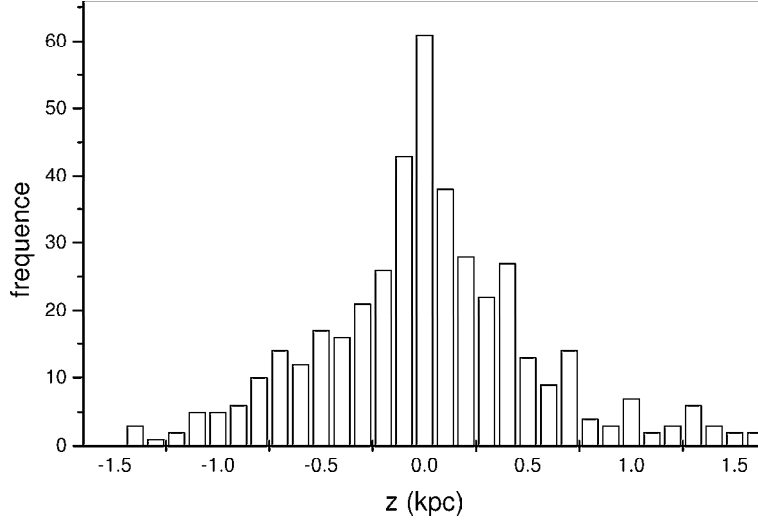


FIG. 3.4: hauteur au plan galactique pour 491 pulsars normaux

Les étoiles jeunes du disque de la Galaxie qui donnent naissance aux pulsars ont une échelle de hauteur de 100 pc mais après l'explosion en supernova, les pulsars reçoivent une impulsion qui les éloigne du lieu où ils ont été formés. Pour cette raison, la distribution observable a une échelle de hauteur plus élevée autour de 400 pc (figure 3.4).

Deux autres propriétés directement accessibles par les observations et d'un grand intérêt pour notre étude sont la période et sa dérivée première.

La période des pulsars se répartit entre 33 ms (pour le pulsar du Crabe) et 5 s avec un maximum autour de 0.4 s. Sa distribution en fréquence présente une décroissance très rapide au niveau des périodes élevées à cause des effets de sélection évoqués plus haut. En ralentissant, les pulsars deviennent moins lumineux et le flux tombe au dessous du seuil de détectabilité de l'antenne. Par ailleurs, le cône d'émission devenant plus étroit le pulsar est plus difficile à détecter. Cette décroissance est exponentielle et la densité de probabilité de la période est bien représentée par une distribution gamma de moyenne  $\langle P \rangle = 0.8$  s.

$$f_P(P) = 6.25P \exp(-2.5P) \quad (3.8)$$

où  $P$  est la période en secondes.

La distribution en fréquence de la dérivée de la période montre que tous les pulsars normaux ralentissent (la dérivée est toujours positive). Les valeurs observées sont faibles (entre  $1.5 \times 10^{-18}$  –  $4.5 \times 10^{-13}$ ) et il est probable qu'une fois encore les effets de sélection nous cachent une partie de la population.

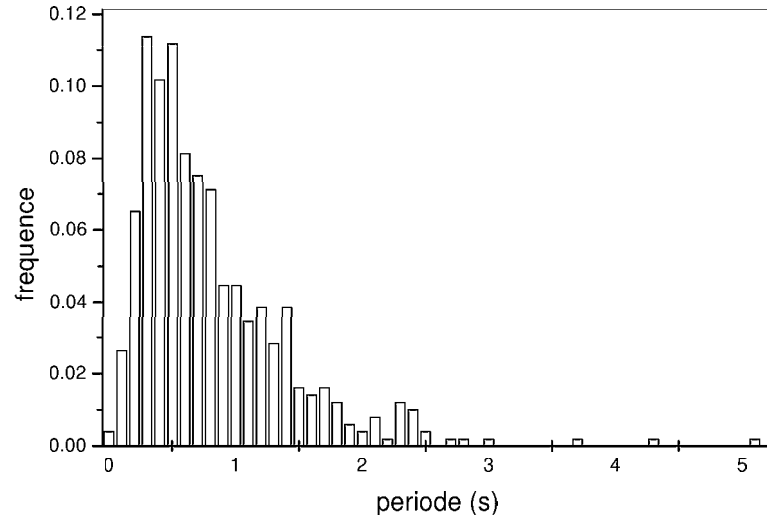


FIG. 3.5: période pour 491 pulsars normaux

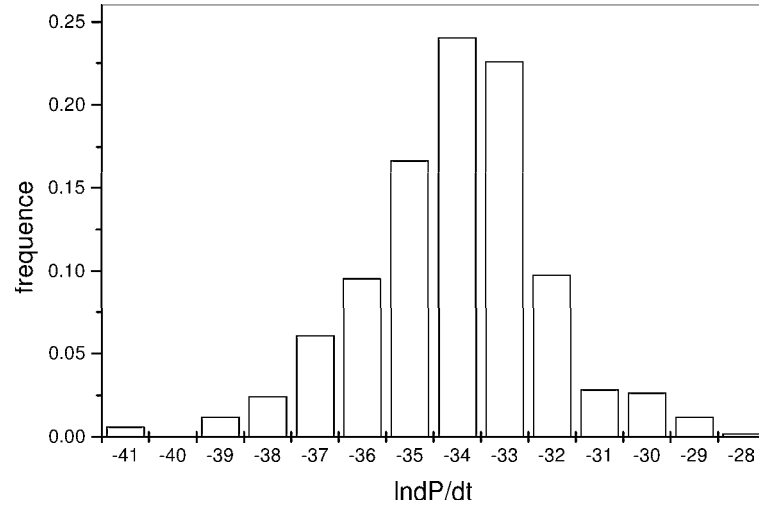


FIG. 3.6: dérivée de la période pour 491 pulsars normaux

En effet, les pulsars avec un taux de ralentissement élevé atteignent plus vite la période critique au dessus de laquelle il n'est plus possible de les détecter.

On peut approcher la densité de probabilité de la dérivée de la période par une distribution log-normale centrée en  $-33.8$  et de dispersion  $3.7$  :

$$f_{\ln \dot{P}}(\ln \dot{P}) = \frac{1}{4.84} \exp\left(-\frac{(\ln \dot{P} - (-33.73))^2}{7.46}\right) \quad (3.9)$$

où  $\dot{P}$  est la dérivée de la période.

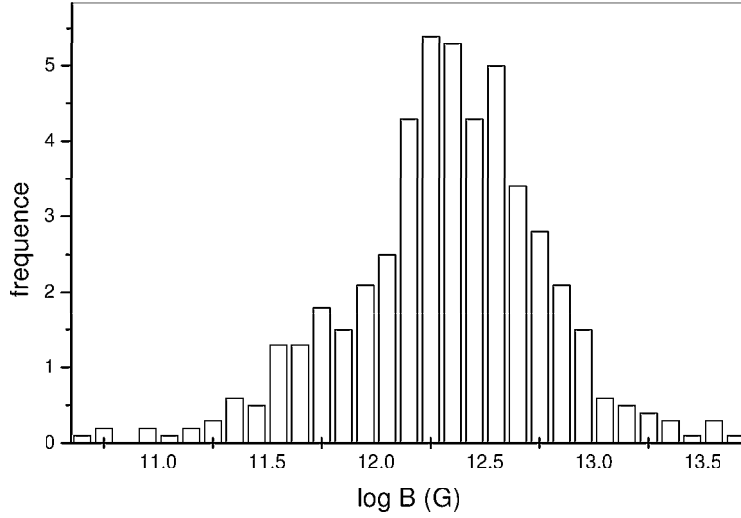


FIG. 3.7: champ magnétique pour 491 pulsars normaux

En considérant que le freinage du pulsar est dipolaire magnétique, on peut déduire deux autres quantités des observations de la période et de sa dérivée. Le champ magnétique à la surface de l'étoile (voir par exemple Manchester et Taylor, 1977 [81]) :

$$B = \left(\frac{3Ic^3}{2\pi^2 R^6} P \dot{P}\right)^{1/2} \quad (3.10)$$

Le problème du champ magnétique sera abordé en détail au chapitre suivant. Contentons nous ici de noter les valeurs très élevées de  $B$ . Elles sont comprises entre  $10.6 - 13.6$  G avec un maximum vers  $12 - 12.5$  G (figure 3.7).

Un indicateur de l'âge est donné par l'âge magnétique :

$$t_s = \frac{P}{2\dot{P}} \quad (3.11)$$

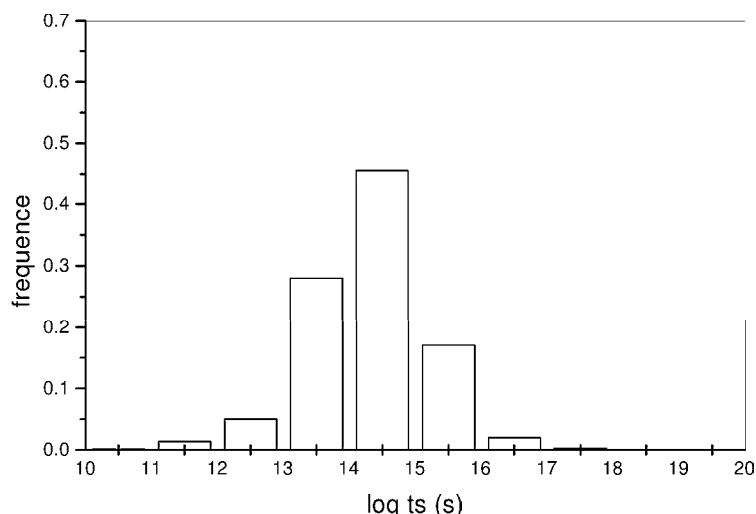


FIG. 3.8: âge indicatif pour 491 pulsars normaux

### 3.4 Luminosité radio

Le principal objectif des synthèses de populations est de bien reproduire les effets de sélection. Comme nous l’avons évoqué plusieurs fois, la luminosité des pulsars (tout comme leur distance) est un facteur déterminant puisque seuls les objets les plus lumineux et les plus proches sont au dessus du seuil de détectabilité de l’antenne. Malheureusement, si nous avons une bonne idée de la distribution spatiale de la population réelle des pulsars à partir des distributions des étoiles massives qui leur donnent naissance, il n’en va pas de même pour la luminosité.

Gunn et Ostricker (1970) [47] ont été les premiers à utiliser les “synthèses de populations de pulsars” et à proposer un modèle d’évolution de la luminosité. A partir de l’étude statistique de 16 objets, ils ont établi une relation de proportionnalité entre la luminosité radio et le carré du champ magnétique et en ont déduit une expression en fonction de la période et de sa dérivée première :  $L \propto P\dot{P}$ . Les conclusions de leur étude connues sous le nom de “modèle standard” sont les suivantes :

- la période initiale des pulsars est de l’ordre de 20 ms
- le champ magnétique décroît exponentiellement sur une échelle de  $4 \times 10^6$  an.

Ce modèle est resté longtemps très populaire dans la mesure où il est

en accord avec certaines observations comme la découverte d'un pulsar de courte période dans les restes de la supernova du Crabe ou les arguments de Lyne et al. (1982) [72] en faveur d'une décroissance du champ basés sur l'étude du diagramme âge magnétique/âge dynamique.

La découverte de nouveaux pulsars a cependant mis en évidence que la luminosité de Gunn et Ostricker (1970) [47] n'était pas consistante vis à vis des observations. Proszynski et Przybycien (1985) [96] ont proposé une expression de la forme  $L \propto P^{-1} \dot{P}^{\frac{1}{3}}$  à partir de laquelle Emmering et Chevalier (1986 [20] et 1989 [34]) puis Narayan (1987) [87] ont effectué de nouvelles synthèses de populations. Ils sont arrivés à la conclusion que des périodes initiales plus élevées, respectivement de l'ordre de 90 – 250 ms et 500 ms rendaient mieux compte des observations. Au contraire, Stollman (1987) [111] a obtenu des périodes initiales entre 1 – 50 ms en utilisant une luminosité radio de la forme :

$$L = \begin{cases} 10^{2.71} \text{ si } \frac{B}{P^2} > 10^{13} \text{ G s}^{-2} \\ 10^{-10.05} \left(\frac{B}{P^2}\right)^{0.98} \text{ sinon} \end{cases}$$

Une alternative a été proposée par Narayan et Ostricker (1990) [88] avec un modèle composé de deux populations de périodes initiales courtes pour l'une et entre 0.5 – 1 s pour l'autre. Bhattacharya et al. (1992) [10], sont revenus récemment à une population unique de période initiale de 100 ms mais ont remis en question le problème de la dissipation du champ magnétique sur une échelle de temps inférieure à la durée de vie des pulsars.

La raison principale pour laquelle ces études donnent des résultats différents est le choix de l'expression de la luminosité. Emmering et Chevalier (1986 [20] et 1989 [34]), Narayan (1987) [87], Narayan et Ostricker (1990) [88], et Bhattacharya et al. (1992) [10] ont choisi une expression pour laquelle les jeunes pulsars rapides sont très lumineux et des périodes initiales de l'ordre de 100 – 500 ms sont nécessaires pour expliquer la faible proportion de ces objets dans l'échantillon observable. En revanche, Stollman (1987) [111] a utilisé une expression constante d'abord puis décroissante à partir d'une certaine période. Notons que Lorimer et al. (1993) [70] après une étude comparative des différents modèles de la luminosité sont arrivés à la conclusion qu'aucun d'entre eux ne rendait compte des observations de façon satisfaisante.

Nous avons revu ce problème en nous basant sur notre catalogue réactualisé, plus complet que celui utilisé par les auteurs cités précédemment. Pour la plupart des pulsars du catalogue, on connaît la luminosité radio, la période des impulsions et sa dérivée première. A partir de ces données statistiques,

nous avons établi une relation de la luminosité radio en fonction de la période et de sa dérivée première. Nous avons cherché une expression de la forme :

$$L_r = A\dot{P}^\alpha \exp(-\beta P) \quad (3.12)$$

proposée par de Freitas Pacheco et Horvath (1997) [28], où  $L_r$  est la luminosité radio en mJy kpc<sup>2</sup>,  $P$  la période en secondes. L'exponentielle décroissante est suggérée par la distribution de la période observée alors qu'une décroissance plus douce en loi de puissance convient mieux pour la dérivée.

Nous avons déterminé les paramètres  $A$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  par une méthode de moindres carrés et obtenu les résultats suivants :

$$A = 2.5 \times 10^6; \alpha = 0.27; \beta = 0.93$$

Les paramètres sont un peu différents de ceux obtenus initialement par de Freitas Pacheco et al. (1997) [28] qui disposaient d'un échantillon statistique plus faible pour faire l'ajustement. La figure (3.9) permet d'apprécier la validité de notre expression de la luminosité. Pour des intervalles donnés de  $L_r$  (3.12), nous avons tracé la valeur moyenne de la luminosité estimée en fonction de celle observée. Comme attendu, les points sont presque alignés le long d'une droite de pente 1.

L'expression (3.12) est l'une des bases de notre étude puisque c'est ainsi que nous calculerons la luminosité dans nos programmes de simulations.

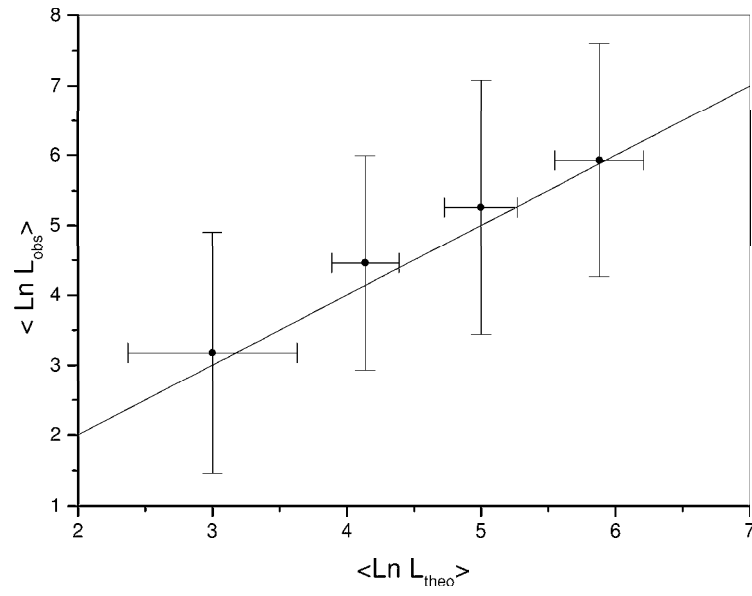


FIG. 3.9: valeur moyenne de la luminosité radio estimée (en ordonnée) et observée (en abscisse) pour 491 pulsars normaux





# Chapitre 4

## Modèle d'Evolution

### 4.1 Théorie du Dipôle Magnétique en Rotation

A l'exception de quelques pulsars binaires, tous les pulsars observés ralentissent, et cela se traduit par une augmentation de la période des impulsions radio (c'est à dire la période de rotation de l'étoile). Le processus responsable de ce freinage est probablement d'origine magnétique ; Pacini (1967) [92] a démontré qu'une étoile à neutrons en rotation est freinée alors qu'elle émet de l'énergie le long des pôles magnétiques.

Le dipôle magnétique en rotation est le modèle le plus simple capable de convertir l'énergie de rotation en énergie électromagnétique. Dans le vide, il perd de l'énergie par radiation et le taux de dissipation est (Landau et Lifshitz, 1951 [64]) :

$$\frac{dE_{rad}}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{\mu^2}{c^3} \sin^2 \alpha \Omega^4 \quad (4.1)$$

où  $\Omega$  est la vitesse angulaire,  $\alpha$  l'angle entre l'axe magnétique et l'axe de rotation et  $\mu$  le moment dipolaire,

$$\mu = \frac{1}{2} B R^3 \quad (4.2)$$

où  $B$  est l'intensité du champ magnétique aux pôles et  $R$  le rayon de l'étoile. Il est clair d'après l'équation (4.1) qu'il n'y a aucune émission si les deux axes sont alignés.

L'énergie de rotation dépend du moment d'inertie ( $I$ ) et de la vitesse angulaire selon l'expression :

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \Omega^2 \quad (4.3)$$

Si l'énergie perdue par rotation est émise sous forme d'énergie radiative on a l'égalité :

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = \frac{dE_{rad}}{dt} \quad (4.4)$$

qui s'écrit :

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{\mu^2}{I} \frac{\sin^2 \alpha}{c^3} \Omega^3 \quad (4.5)$$

et qui s'intègre pour donner :

$$\Omega = \Omega_0 \left(1 + \frac{t}{\tau_*}\right)^{-1/2} \quad (4.6)$$

où  $\tau_*$  est le temps caractéristique de freinage :

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{\sin^2 \alpha} \quad (4.7)$$

avec

$$\tau_0 = \frac{3}{4} \frac{I}{\Omega_0^2} \frac{c^3}{\mu^2} \quad (4.8)$$

En fonction de la période, (4.6) s'écrit :

$$P = P_0 \left(1 + \frac{t}{\tau_*}\right)^{1/2} \quad (4.9)$$

où  $P_0$  est la période initiale.

A partir de la formule (4.6), on calcule l'indice de freinage

$$N = \frac{\Omega \ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2} = 3 \quad (4.10)$$

Ce dernier résultat n'est pas en accord avec les mesures, toutes inférieures à trois (voir tableau 4.1), de l'indice de freinage des quatre pulsars dont on connaît la dérivée seconde.

Nous considérons par la suite une modification au modèle canonique capable de rendre compte des observations.

PSR B	0531+21	1509-58	0540-69	0833-45
N	2.518	2.837	2.04	1.4

TAB. 4.1: indice de freinage pour les 4 pulsars dont on a pu mesurer la dérivée seconde, dont ceux du Crabe PSR B0531+21 et de Vela PSR B0833-45

## 4.2 Modification au Modèle du Dipôle

Le ralentissement régulier des pulsars est bien compris dans le cadre du modèle canonique du dipôle que nous venons de décrire. Cependant, certains objets présentent des variations brutales de leur vitesse de rotation, observées sous la forme de “glitches”. Ce phénomène est assez rare puisqu’il a été observé chez 21 pulsars seulement (Shemar et Lyne, 1996 [104]) et se produit plus fréquemment chez les objets jeunes (un tiers des “glitches” ont eu lieu chez les pulsars du Crabe et de Vela et jamais chez les pulsars millisecondes). Un aspect important des “glitches” est qu’ils sont invariablement suivis d’une augmentation du taux de ralentissement, probablement à cause d’un accroissement soudain et durable du couple de forces dipolaires magnétiques (Link et Epstein, 1997 [68]). Pour expliquer les “glitches” observés dans l’évolution de la période du pulsar du Crabe, Alpar et Pines (1993) [3] ont suggéré que des modifications de la structure interne de l’étoile peuvent réduire le moment d’inertie et entraîner une augmentation de la vitesse de rotation par conservation du moment angulaire. Mais dans ce cas, le taux de ralentissement devrait décroître, ce qui est contraire aux observations. Récemment, Link et al. (1998) [69] ont proposé un autre scénario (figure 4.1). Lorsque l’étoile ralentit, elle devient moins elliptique, sa circonférence à l’équateur diminue ainsi que son aplatissement aux pôles. Les forces de compression cisailent la matière à l’équateur et la croûte craque, produisant un tremblement d’étoile. La matière se déplace vers les latitudes plus élevées le long d’une faille inclinée par rapport à l’équateur. Il se crée des “montagnes”, la symétrie axiale est brisée et l’axe de rotation et le moment angulaire ne sont plus alignés. Des processus dissipatifs conduisent ensuite à un nouvel état d’équilibre auquel correspond un accroissement de l’angle entre l’axe du dipôle et l’axe de rotation. Le phénomène se répète modifiant l’orientation du dipôle jusqu’à une position perpendiculaire par rapport à l’axe de rotation. Le couple de forces qui s’exerce sur l’étoile augmente alors entraînant un accroissement du taux de ralentissement du pulsar. En nous inspirant de cette hypothèse, nous proposons de modéliser l’inclinaison  $\alpha$  de l’axe magnétique

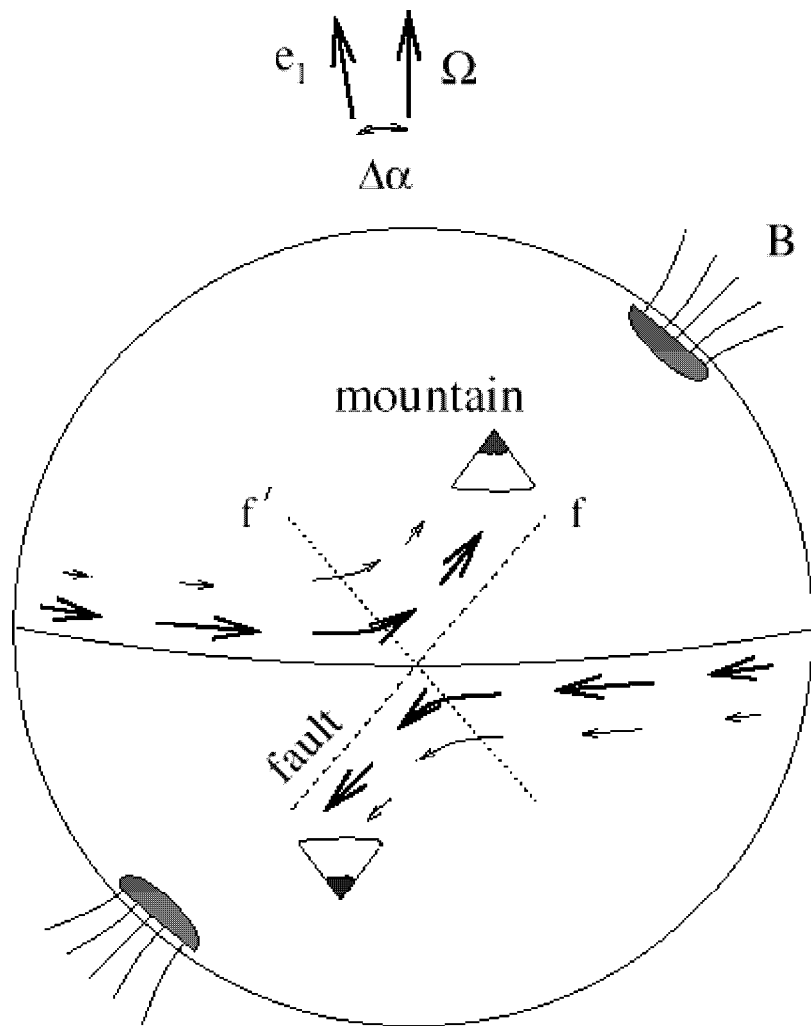


FIG. 4.1: migration du dipôle magnétique par rapport à l'axe de rotation, consécutive à des tremblements d'étoiles successifs (d'après Link, Franco et Epstein, 1998)

par rapport à l'axe de rotation par :

$$\sin^2 \alpha(t) = 1 - n_0 e^{-\frac{t}{t_\alpha}} \quad (4.11)$$

où  $t_\alpha$  représente le temps caractéristique de migration du dipôle et  $n_0$  le carré du cosinus de l'angle  $\alpha$  à l'origine.

La position des axes l'un par rapport à l'autre est arbitraire au départ mais tend vers une position perpendiculaire pour laquelle l'émission est maximale. Le temps caractéristique de freinage n'est pas constant comme dans le modèle dipolaire canonique, mais dépend de l'angle  $\alpha(t)$  entre les deux axes et a pour expression :

$$\tau(t) = \frac{\tau_0}{\sin^2 \alpha(t)} \quad (4.12)$$

L'intégration de l'équation (4.5) donne une expression modifiée de la période :

$$P = P_0 \left( 1 + \frac{t}{\tau_0} - n_0 \frac{t_\alpha}{\tau_0} (1 - e^{-\frac{t}{t_\alpha}}) \right)^{1/2} \quad (4.13)$$

Lorsque  $t \gg t_\alpha$ , on retrouve les équations du modèle standard où les axes du dipôle et de rotation sont orthogonaux. Au contraire, si  $t \ll t_\alpha$ , le modèle avec migration du dipôle prévoit l'existence de pulsars pour lesquels les deux axes sont presque alignés. Leur période est courte, leur taux de ralentissement faible et ils ne pourraient exister dans le cadre du modèle canonique qu'en présence d'un champ magnétique lui aussi très faible. Notons aussi que ces objets sont jeunes malgré un âge magnétique élevé.

Une conséquence importante de notre modèle concerne l'indice de freinage ; il évolue avec l'âge du pulsar et tend asymptotiquement vers la valeur du modèle dipolaire selon l'équation :

$$N = 3 - 2 \frac{t_s}{t_\alpha} \cot^2 \alpha(t) \quad (4.14)$$

Les jeunes pulsars dont l'âge est inférieur au temps caractéristique de décroissance ont un indice de freinage inférieur à trois, en accord avec les quatre mesures dont nous disposons.

L'angle  $\alpha$  peut varier brusquement lorsque la croûte craque ou de façon discontinue comme le suggère l'équation (4.11). Il faut noter que les pulsars PSR B1509-58 ou PSR B0540-69 ont un indice de freinage inférieur à trois bien qu'ils n'aient encore présenté aucune irrégularité sous la forme de glitch. Il est possible que d'autres mécanismes de freinage interviennent comme par

exemple des couples de forces électro-magnétiques (Casini et Montemayor, 1998 [16]).

Pour le pulsar du Crabe dont on connaît l'âge réel et l'indice de freinage on peut calculer le taux de migration du dipôle à partir de l'équation (4.14). En considérant que le dipôle est orienté de  $64^\circ$  par rapport à l'axe de rotation, on obtient un taux de  $9.2 \times 10^{-5} \text{ rad an}^{-1}$ . Allen et Horvath (1997) [2] ont déduit une migration de  $1.8 \times 10^{-5} \text{ rad an}^{-1}$  de l'observation des "glitches" pendant 20 ans. Cet intervalle de temps est très court et est probablement responsable du facteur cinq entre les deux estimations. Selon Allen et Horvath (1997) [2], la mesure du taux de migration à partir de quelques événements est biaisée par rapport à celle déduite d'un modèle où l'angle varie de façon continue. Pour les trois autres pulsars, la moyenne du taux de migration "continu" est  $6.5 \times 10^{-5} \text{ rad an}^{-1}$  (Allen et Horvath, 1997 [2]). Les différents résultats sont comparables à moins d'un ordre de grandeur près ce qui renforce la thèse d'une origine commune au phénomène de migration du dipôle et apporte un soutien à notre modèle d'évolution de la période.

# Chapitre 5

## synthèses de populations

### 5.1 Code Numérique

Les simulations prennent en compte les divers facteurs de sélection tels la sensibilité des radio télescopes et la non isotropie du cône d'émission qui introduisent des biais importants dans les observations.

Pour générer une population nous procédons de la façon suivante pour chaque pulsar. Nous supposons que la période initiale  $P_0$  n'est pas fixe mais suit une distribution normale et nous déterminons  $P_0$  par un tirage au sort. La vitesse angulaire d'une étoile ne peut pas excéder la vitesse Képlérienne  $\Omega_{\max}$  au delà de laquelle la perte de masse à l'équateur rend l'étoile instable. Une estimation de cette limite est donnée dans le cas relativiste par la relation de Friedman et al. (1989) [39] :

$$\Omega_{\max} \approx 0.78 \sqrt{\pi G \bar{\rho}} \quad (5.1)$$

où  $\bar{\rho}$  est la densité moyenne de l'étoile. Elle correspond à des périodes entre 0.5 – 2 ms selon l'équation d'état considérée (Stergioulas et al., 1998 [109]). Par conséquent, nous avons éliminé tous les objets générés avec une période inférieure à 0.5 ms. La moyenne  $\langle P_0 \rangle$  et l'écart-type  $\sigma_{P_0}$  de la densité de probabilité sont des paramètres du modèle que nous faisons varier jusqu'à obtenir une population simulée la plus proche possible de la population observée. Nous procédons de la même façon pour le temps caractéristique de freinage magnétique  $\tau_0$  qui est supposé suivre une distribution log-normale. Nous reverrons en détail le problème du champ magnétique dans les chapitres suivants mais pour ces premières simulations, nous avons considéré que  $B$  restait constant. Cette hypothèse est fondée sur les travaux récents de Batthacharya et al. (1992) [10] et de Mukherjee et Kembhavi (1997) [86] qui ont montré que la dissipation du champ magnétique, si elle existait, n'était



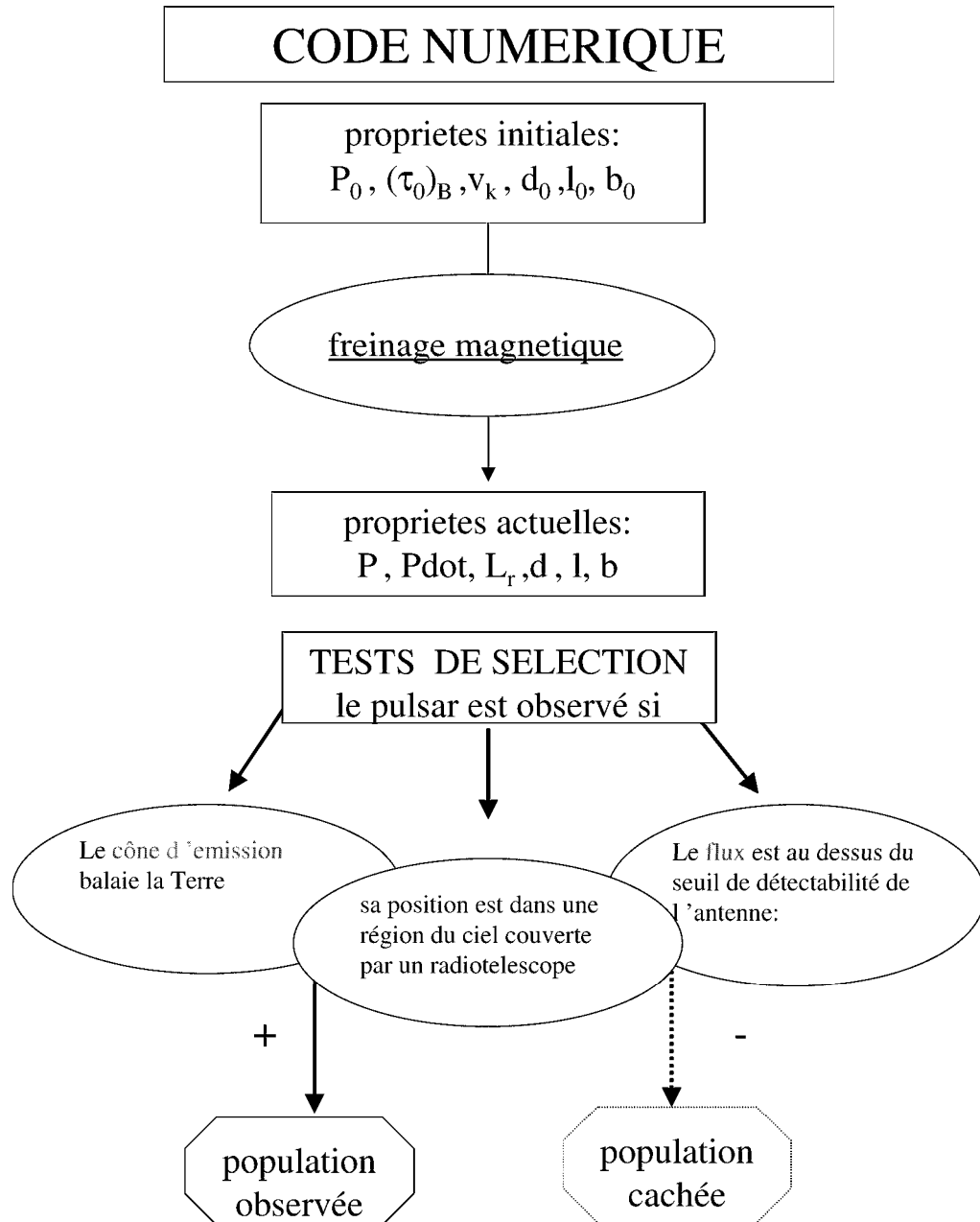


FIG. 5.1: principe des simulations numériques de la population des pulsars de la Galaxie basé sur des techniques de Monte Carlo. La modélisation des facteurs de sélection permet d'isoler la population observable.

pas sensible pendant la durée de vie des pulsars. Le paramètre  $t_\alpha$ , est maintenu fixe pour une simulation donnée.

Nous supposons que pour un pulsar nouvellement formé, l'angle  $\alpha$  entre l'axe de rotation et celui du dipôle est orienté au hasard. La valeur initiale du cosinus de l'angle  $\alpha$  est donc simulée par un tirage au sort uniforme, ce qui définit le paramètre  $n_0$ .

L'âge  $t$ , est aussi obtenu par un tirage au sort. La distribution de l'âge est supposée uniforme puisque le taux de formation d'étoiles dans le disque galactique n'a pas beaucoup évolué depuis les derniers cent millions d'années. La largeur de la distribution,  $t_{\max}$ , est un nouveau paramètre du modèle ; il représente la durée de la phase pulsar.

Pour savoir si le pulsar peut être détecté par un radiotélescope, nous devons connaître sa position par rapport à la Terre. Son déplacement propre peut être important et nous devons en tenir compte dans nos simulations. Nous déterminons d'abord par un tirage au sort sa position initiale dans le plan de la Galaxie. La distribution de la distance des pulsars au centre galactique doit être semblable à celle des objets de la population I, c'est à dire une distribution exponentielle (loi de Freeman) avec une échelle de distance égale à 2.3 kpc (Ruphy et al., 1996 [102]) :

$$p(R_i) = Ae^{-\frac{R_i}{2.3}} \quad (5.2)$$

où  $R_i$  est la distance initiale au centre de la galaxie en kpc. Comme aucun pulsar ne doit se former actuellement dans le bulbe de la Galaxie, nous imposons la condition  $R_i \geq 1$  kpc.

Nous supposons une symétrie azimutale du disque galactique et donc une distribution uniforme de l'angle  $\varphi_i$  entre les directions Terre-centre de la Galaxie et pulsar-centre de la Galaxie. La distance héliocentrique initiale,  $d_i$  est alors calculée à partir de la relation de Pythagore généralisée :

$$d_i = \sqrt{R_i^2 + R_0^2 - 2R_iR_0 \cos(\varphi_i)} \quad (5.3)$$

où  $R_0$  est la distance de la Terre au centre de la Galaxie estimée à 8.5 kpc (Battacharya et al., 1992 [10]).

Nous déterminons ensuite la vitesse propre du pulsar dans le plan galactique ( $v_p$ ) par des tirages au sort indépendants de ses composantes tangentielle ( $v_{pt}$ ) et radiale ( $v_{pr}$ ). Nous admettons que la vitesse suit une distribution gaussienne de dispersion à une dimension de  $100 \text{ km s}^{-1}$  (Lorimer et al., 1993 [70]), ce qui correspond à une vitesse moyenne de  $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \times 100 \simeq 160 \text{ km s}^{-1}$

(c'est à dire la vitesse "standard" de Gunn et Ostriker, 1970 [47]). Nous avons aussi effectué des simulations avec des vitesses moyennes de  $300 \text{ km s}^{-1}$  (Hansen et Phinney, 1997 [49]) et  $450 \text{ km s}^{-1}$  (Lyne et Lorimer, 1994 [74]) sans relever de changements significatifs dans nos résultats. Notons que Lyne et Lorimer (1994) [74] ont calculé une vitesse moyenne de l'ordre de  $450 \text{ km s}^{-1}$  à partir de mesures interférométriques sur un échantillon de 99 pulsars. Mais l'on peut soupçonner un biais dans ce résultat ; les pulsars observés étant les plus proches, ce sont vraisemblablement ceux qui ont quitté le centre de la Galaxie le plus vite.

S'il n'a pas de vitesse propre, le pulsar décrit une orbite circulaire à la vitesse  $V_c(R_i)$  (Schmidt, 1985 [106]) qui n'est autre que la vitesse de rotation différentielle de la Galaxie à la distance  $R_i$  du centre. Son énergie sur cette orbite est :

$$E_i = -\frac{1}{2}MV_c(R_i)^2 \quad (5.4)$$

où l'on a utilisé le théorème du Viriel. Et son moment angulaire s'écrit :

$$L_i = MV_c(R_i)R_i \quad (5.5)$$

L'introduction d'une vitesse propre modifie l'orbite en une ellipse ou une hyperbole dont le centre galactique occupe un des foyers. Nous calculons l'énergie et le moment angulaire du pulsar sur sa nouvelle orbite à partir des relations :

$$E = -\frac{1}{2}M(V_c(R_i)^2 - v_p^2) + MV_c(R_i)v_{pt} \quad (5.6)$$

et

$$L = M(V_c(R_i) + v_{pt})R_i \quad (5.7)$$

Nous en déduisons le demi grand axe

$$a = R_i \left| \frac{E_i}{E} \right| \quad (5.8)$$

l'excentricité

$$e = \sqrt{1 - \frac{EL^2}{E_i L_i^2}} \quad (5.9)$$

et le paramètre de l'orbite :

$$p = a |1 - e^2| \quad (5.10)$$

La position du pulsar sur son orbite est déterminée par le rayon  $R$  (qui est la distance au centre de la Galaxie) et l'anomalie vraie  $\nu$  (qui est la distance angulaire au Périgée). Ces deux grandeurs sont liées par l'équation :

$$R = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (5.11)$$

dont la dérivée s'écrit :

$$v_{pr} = \frac{e \sin \nu}{p} L \quad (5.12)$$

Connaissant  $R_i$ , ces deux relations nous permettent de calculer l'anomalie vraie à l'instant initial.

La position initiale du pulsar sur son orbite étant alors complètement déterminée, nous établissons sa position actuelle grâce à une méthode numérique basée sur l'équation :

$$t' = \int_{\nu_i}^{\nu(t')} \frac{p^2}{L} \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2} \quad (5.13)$$

Nous calculons la valeur de l'intégrale par la méthode des trapèzes pour des valeurs croissantes de  $\nu(t')$  :  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$  avec  $\nu_{i+1} = \nu_i + h$  et nous estimons la valeur actuelle de l'anomalie vraie avec une précision  $h$  (que nous avons choisie égale à  $1^\circ$ ) par :

$$\nu = \frac{\nu_{n-1} + \nu_n}{2} \quad (5.14)$$

où  $\nu_n$  est la valeur de  $\nu(t')$  pour laquelle l'intégrale  $t'$  dépasse l'âge du pulsar. Nous calculons ensuite le rayon actuel de l'orbite à partir de l'équation (5.11).

Maintenant que nous connaissons la position du pulsar dans le plan de la Galaxie, nous déterminons sa hauteur par un tirage au sort. La distance au plan galactique suit une distribution exponentielle d'échelle de hauteur 100 pc (paragraphe 3.3) :

$$f_z(z) = K e^{-\frac{z}{0.1}} \quad (5.15)$$

où  $z$  est la distance au plan de la Galaxie en kpc.

Nous calculons alors les coordonnées galactiques du pulsar ( $D, l, b$ ). La distance à la Terre est donnée par la relation :

$$D = \sqrt{d^2 + z^2} \quad (5.16)$$

où la distance projetée dans le plan galactique s'écrit :

$$d = \sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos(\varphi)} \quad (5.17)$$

et où l'angle entre la direction Soleil-centre de la Galaxie et pulsar-centre de la Galaxie est donné par :

$$\varphi = \varphi_i + \nu - \nu_i - \frac{V_c(R_0)}{R_0}t \quad (5.18)$$

Dans cette dernière expression,  $\frac{V_c(R_0)}{R_0}t$  représente le déplacement angulaire du Soleil dû à la rotation galactique depuis la naissance du pulsar. La longitude est complètement déterminée par le calcul de

$$\cos l = \frac{R \cos(\varphi - \pi) + R_0}{d} \quad (5.19)$$

et de

$$\sin l = \frac{R \sin(\varphi - \pi)}{d} \quad (5.20)$$

Enfin on obtient la latitude galactique par la relation :

$$b = a \tan\left(\frac{z}{d}\right) \quad (5.21)$$

Connaissant les coordonnées galactiques du pulsar, nous sélectionnons les surveys qui couvrent la région du ciel où il se situe et par conséquent, sont susceptibles de le détecter. Nous choisissons l'un d'eux par un tirage au sort qui prend en compte la proportion des pulsars du catalogue détectés par chaque survey. Ceux d'Arecibo et de Green Bank sont eux mêmes subdivisés en trois sous-survey de façon à modéliser l'évolution de la sensibilité de l'antenne. Le choix du sous-survey se fait comme pour le choix du survey.

Nous calculons ensuite la luminosité radio à partir de l'expression (3.12) et nous en déduisons la densité de flux par la relation :

$$S = \frac{L_r}{d^2} \quad (5.22)$$

Nous déterminons si le flux reçu du pulsar est supérieur au seuil de déteçtabilité du radiotélescope. Ce dernier dépend des caractéristiques techniques de l'antenne selon la relation (Manchester et al., 1996 [80]) :

$$S_{\text{lim}} = A_0(T_r + T_{sky})\left[\frac{W}{(P - W)}\right]^{1/2} \quad (5.23)$$

où  $A_0$  est une constante de normalisation donnée par :

$$A_0 = \frac{\alpha\beta}{G\sqrt{N_p\Delta\nu t_{int}}} \quad (5.24)$$

Dans cette expression,  $\alpha$  est le rapport signal à bruit,  $\beta$  un facteur qui tient compte des différents processus de perte,  $G$  le gain de l'antenne,  $N_p$  le nombre de polarisations,  $\Delta\nu$  la largeur de la bande de fréquence et  $t_{int}$  le temps d'intégration.

Dans l'expression (5.23),  $T_r$  représente le bruit du récepteur,  $T_{sky}$  est la température de fond du ciel dans la direction de la ligne de visée et selon Narayan (1987) [87] :

$$T_{sky}(l, b) = 25^\circ + \frac{275^\circ}{(1 + \frac{l}{42^\circ})^2(1 + \frac{b}{3^\circ})^2} \quad (5.25)$$

$W$  est la largeur effective de la pulsation et s'écrit (Narayan, 1987 [87])

$$W^2 = W_e^2 + \tau_{samp}^2 + \tau_{scatt}^2 + \tau_{DM}^2 \quad (5.26)$$

Dans cette expression,  $W_e$  représente la largeur intrinsèque de la pulsation soit

$$W_e = 0.04P \quad (5.27)$$

$\tau_{samp}$  est l'intervalle d'échantillonnage effectif (environ le double de l'intervalle d'échantillonnage intrinsèque),  $\tau_{scatt}$  est l'élargissement dû à la diffusion dans le milieu interstellaire. Selon Battacharya et al. (1992) [10] :

$$\tau_{scatt}(\text{ms}) = 10^{-4.62+1.14\log_{10} DM} + 10^{-9.22+4.46\log_{10} DM} \quad (5.28)$$

où  $DM$  est la mesure de dispersion en  $\text{pc cm}^{-3}$ ,

survey	$T_r(K)$	$\tau_{samp}(ms)$	$C_{DM}(ms \text{ pc}^{-1} \text{ cm}^3)$	$A_0(\text{mJyK}^{-1})$
Arecibo 1	110	33	0.0094	0.038
Arecibo 2	90	0.6	0.0063	0.085
Arecibo 3-4	62	1 (0.5)	0.0082 (0.026)	0.02 (0.032)
Green Bank 1	170	33	0.28	0.3
Green Bank 2	30	33	0.28	0.13
Green Bank 3	30	4	0.035	0.18
Jodrell Bank	50	0.6	0.016	0.19
Molonglo 2	210	40	0.06 (0.3)	0.17
Parkes 70	30	0.6	0.0125	0.19

TAB. 5.1: paramètres des antennes

$\tau_{DM}$  est l'élargissement dû à la dispersion pour un canal et s'écrit :

$$\tau_{DM}(\mu s) = C_{DM} DM \text{ (pc cm}^{-3}\text{)} \quad (5.29)$$

où selon Stockes (1986) [110]

$$C_{DM} = 8.3 \frac{B_c \text{ (MHz)}}{\nu^3 \text{ (GHz)}} \quad (5.30)$$

avec  $C_{DM}$  en  $\mu s \text{ pc}^{-1} \text{ cm}^3$ .  $B_c$  est la largeur de la bande de fréquence d'un canal et  $\nu$  la fréquence d'observation.

Le tableau (5.1) donne les caractéristiques des antennes des surveys de notre catalogue. Toutes ont été établies à partir de l'article de Narayan (1987) [87] et des articles donnés en référence dans la table 5 du catalogue de Taylor et Manchester (1995) [114] :

La mesure de dispersion  $DM$  dépend de la densité électronique selon la relation :

$$DM = \int_0^D n_e(R, z) ds \quad (5.31)$$

où

$$n_e(R, z) = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_0}} (n_1 e^{-\frac{|z|}{H_1}} + n_2 e^{-\frac{|z|}{H_2}}) \quad (5.32)$$

avec  $n_1 = 0.0176 \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_2 = 0.0294 \text{ cm}^{-3}$ ,  $H_1 = 0.07 \text{ kpc}$  et  $H_2 = 0.68 \text{ kpc}$  (Battacharya et al., 1992 [10]). On obtient  $DM$  en intégrant numériquement (5.31) par la méthode des trapèzes.

Nous avons utilisé l'expression de la densité électronique de Battacharya et al. (1992) [10] plutôt que le modèle de Taylor et Cordes (1993) [113]

pour des raisons de temps de calcul. Les tests que nous avons effectués ont montré que cette simplification ne modifiait pas de façon sensible la valeur des paramètres optimaux.

Si le pulsar simulé a une densité de flux supérieure à  $S_{\text{lim}}$ , il est détectable et nous regardons si le faisceau d'émission qui balaie l'espace passe ou non en direction de la Terre. La probabilité pour que ce phénomène se produise dépend de l'orientation de l'axe de rotation (supposée aléatoire) et de l'angle d'ouverture du faisceau. D'après le modèle d'émission de Biggs (1990) [11], le demi-angle du cône du faisceau est donné par :

$$\theta = \frac{6.2}{\sqrt{P}} \text{ deg} \quad (5.33)$$

où  $P$  est la période en secondes. Selon ce modèle, l'angle d'ouverture évolue au fur et à mesure que le pulsar vieillit, devenant de plus en plus étroit. La fraction  $\zeta$  du ciel couverte par le faisceau est (Emmering et Chevalier, 1989 [34]) :

$$\zeta = (1 - \cos \theta) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin \theta \quad (5.34)$$

où  $\theta$  est le demi-angle du cône d'émission en radians.

Ces dernières équations définissent la probabilité que le pulsar soit finalement détecté par le radiotélescope.

La simulation s'arrête lorsque la population modélisée contient un nombre d'objets égal à celui de l'échantillon observé. Afin de minimiser les erreurs de fluctuation statistique, chaque résultat est une moyenne sur 500 expériences numériques.

## 5.2 Résultats

Une population simulée de pulsars est caractérisée par la connaissance des paramètres  $\langle P_0 \rangle$  et  $\sigma_{P_0}$  de la distribution de la période initiale, des paramètres  $\langle \log \tau_0 \rangle$  et  $\sigma_{\log \tau_0}$  de la distribution du temps caractéristique de freinage, du temps caractéristique de migration du dipôle ( $t_\alpha$ ) et de la durée de vie moyenne des pulsars ( $t_{\text{max}}$ ). Au cours de plusieurs simulations, nous faisons varier ces paramètres à la recherche du meilleur compromis entre l'ajustement des distributions de la période, de sa dérivée, de la distance, du champ et de l'âge magnétique. La qualité des ajustements est évaluée par des tests du  $\chi^2$  et de Kolmogorov-Smirnov. Nous avons obtenu les meilleurs résultats pour  $t_{\text{max}} = 24 \text{ Man}$  (modèle A) mais nous avons aussi étudié le cas



Paramètres	Modèle A	Modèle B
$t_{\max}$ (Man)	24	100
$P_0$ (ms)	$290 \pm 20$	$290 \pm 20$
$\sigma_{P_0}$	$100 \pm 20$	$100 \pm 20$
$\ln \tau_0$ (an)	$9 \pm 0.5$	$11 \pm 0.5$
$\sigma_{\ln \tau_0}$	$3.6 \pm 0.2$	$3.4 \pm 0.2$

TAB. 5.2: paramètres optimaux pour les modèles A et B

où  $t_{\max} = 100$  Man (modèle B). Les paramètres optimisant chacun des deux modèles sont présentés dans le tableau (5.2).

Nous obtenons que la période initiale n'est pas fixe mais suit une distribution normale de moyenne  $\langle P_0 \rangle = 290$  ms et d'écart type  $\sigma_{P_0} = 100$  ms, pour les modèles A et B. Ce résultat est comparable à la valeur moyenne unique de 100 ms obtenue par Bhattachaya et al (1992) [10]. D'un autre côté, l'écart-type relativement élevé de la distribution permet de rendre compte des pulsars normaux comme celui du Crabe, observés avec une courte période. Nos simulations prédisent en effet que 60 objets (modèle A) et 90 objets (modèle B) ont une période inférieure à 80 ms. Ce résultat est en accord avec les observations des pulsars les plus jeunes. La valeur moyenne des objets avec un âge inférieur à 20, 50 et 100 kan est respectivement  $\langle P \rangle = 123$  ms, 162 ms et 173 ms, c'est à dire bien supérieure à la période de 33.4 ms du pulsar du Crabe. Le tableau (5.3) où nous avons classé les pulsars les plus jeunes par ordre d'âge met en relief la diversité des périodes initiales. La période de PSR B1509-58, qui a presque le même âge que le pulsar du Crabe est de 150 ms, celle de PSR B1610-50 qui est six fois plus vieux est de 231 ms alors que les périodes du pulsar de Vela et de PSR B1951+32, respectivement dix fois et cent fois plus vieux que le Crabe, sont de seulement 89 ms et 59 ms.

Si les paramètres de la distribution gaussienne de la période initiale sont les mêmes pour  $t_{\max} = 24$  Man (modèle A) et  $t_{\max} = 100$  Man (modèle B) il n'en va pas de même pour le temps caractéristique de freinage ; la moyenne de la distribution augmente avec  $t_{\max}$  ( $\langle \ln \tau_0 \rangle = 9$  pour le modèle A contre  $\langle \ln \tau_0 \rangle = 11$  pour le modèle B) et sa largeur diminue ( $\sigma_{\ln \tau_0} = 3.6$  pour le modèle A contre  $\sigma_{\ln \tau_0} = 3.4$  pour le modèle B).

Nous reviendrons plus en détail sur le problème du champ magnétique aux chapitres suivants mais nous pouvons déjà mentionner un résultat intéressant. Dans la théorie du dipôle, le champ magnétique  $B_0$  est lié aux paramètres  $P_0$  et  $\tau_0$  par l'équation suivante :

$$KB_0^2 = \frac{P_0^2}{2\tau_0} \quad \text{où} \quad K = \frac{2\pi^2}{3} \frac{R^6}{Ic^3} \quad (5.35)$$

PSR B	nébuleuse associée	age (kan)	P(ms)
0531+21	Crabe	1.24	33.4
1509-58	MSH15-52	1.56	150
0540-69	LMC	1.67	50.3
1610-50	Kes 32	7.5	231
0833-45	Vela	11.0	89
1338-62	G308.8-.1	12.0	193
1757-24	G5.4-1.2/W28	14.6	125
1800-21	G8.7-.1/W30	15.8	134
1706-44	G343.1-2.3	17.5	102.4
1853+01	W44	20.4	267
1823-13		22.0	101
1727-33	G354.1+0.1	26.0	139
1643-43	G341.2+0.9	33.0	232
1930+22	G57.3+1.2	40.0	144
2334+61	G114.3+0.3	41.0	495
1951+32	CTB80	110.0	39.5
0656+14	.	112.0	385

TAB. 5.3: période de rotation des pulsars normaux les plus jeunes par ordre croissant d'âge

La valeur moyenne du champ magnétique de la population observable, calculée partir de cette relation, est en accord avec les valeurs déduites des observations (équation 3.10) puisque l'on obtient respectivement  $\langle B_0 \rangle = 2.5 \times 10^{12}$  G et  $\langle B_0 \rangle = 10^{12}$  G pour les modèles A et B. En revanche, le champ magnétique moyen de la population totale est supérieur d'un ordre de grandeur à la valeur canonique, avec respectivement  $\langle B_0 \rangle = 2.5 \times 10^{13}$  G et  $\langle B_0 \rangle = 10^{13}$  G pour les modèles A et B. L'hypothèse d'une distribution de la période initiale et du temps caractéristique de freinage permet de modéliser des objets avec des champs magnétiques aussi élevés que ceux des magnétars. Mais dans la mesure où ils sont freinés très vite la plupart d'entre eux ne sont plus observables en radio.

Sous l'hypothèse d'une migration du dipôle certains pulsars jeunes (pour lesquels l'axe du dipôle et l'axe de rotation sont presque alignés) peuvent avoir un taux de ralentissement faible, et cependant être soumis à un fort champ magnétique (voir paragraphe 4.2). Malheureusement comme il est difficile de les distinguer des pulsars âgés avec un faible champ magnétique prédits par le modèle standard, le temps de migration du dipôle est déterminé avec une grande incertitude (Regimbau et de Freitas Pacheco, 2000 [98]). Dans le domaine d'investigation considéré (entre 6 – 12 kan), nous ne notons aucune influence d'une variation de ce paramètre sur les différentes distributions et nous le fixons à  $10 \pm 4$  kan. Le taux de migration est alors de l'ordre de

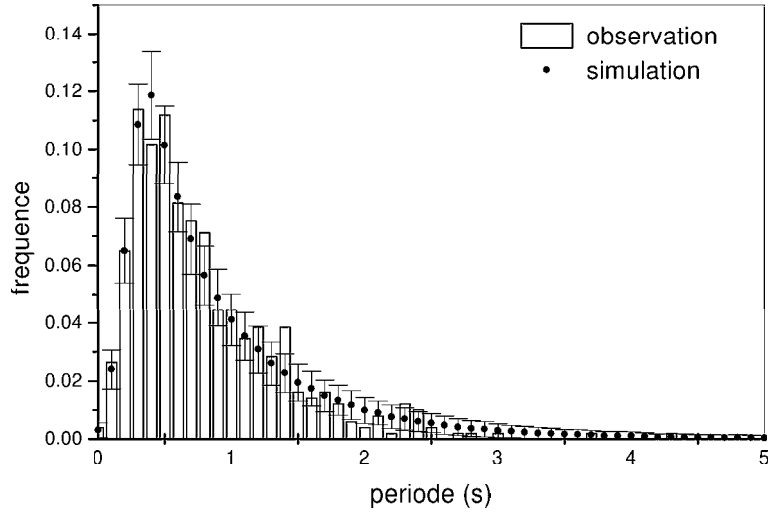


FIG. 5.2: distribution de la période pour les modèles A et B (points) comparée à la distribution observée (colonnes). Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion calculée à partir de 500 expériences numériques

$(2 - 18) \times 10^{-5} \text{ rad an}^{-1}$  c'est à dire comparable aux valeurs calculées à partir des données sur les “glitches”.

Nous présentons maintenant les figures comparant les distributions observées et simulées de la période, de sa dérivée première et de la distance héliocentrique, pour les paramètres optimaux donnés dans le tableau (5.2). Celles du champ et de l'âge magnétique qui interviennent aussi dans la recherche du meilleur ajustement seront présentées au prochain chapitre. Nous étudions aussi l'effet de la variation de chacun de ces paramètres sur les différentes distributions. Pour chaque figure, les barres d'erreurs correspondent à la dispersion calculée à partir de 500 expériences numériques. Pour plus de clarté, nous n'avons pas fait figurer les barres d'erreurs du modèle B mais elles sont comparables à celles du modèle A.

La figure (5.2) compare les distributions observée et simulée de la période. Nous obtenons le même ajustement pour les modèles A et B et le test de Kolmogorov donne une adéquation assez élevée de  $(60 - 65)\%$ . La valeur la plus probable de la distribution simulée est  $P = 0.4 \text{ s}$  avec une fréquence de 0.12, comme pour la distribution observée. Notons aussi que les simulations reproduisent très bien les effets de sélection matérialisés par la coupure au niveau des périodes élevées, et donne du crédit à notre modèle de la luminosité.

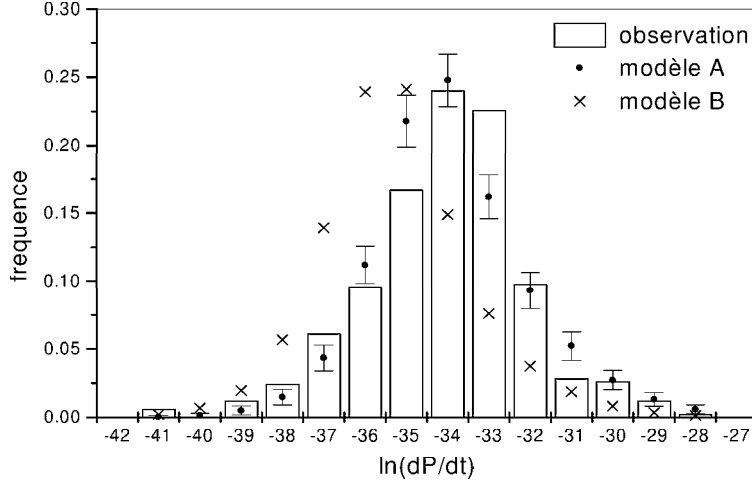


FIG. 5.3: distributions de la dérivée de la période pour les modèles A (points) et B (croix) comparées à la distribution observée (colonnes). Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion calculée à partir de 500 expériences numériques

L'expression de  $P$  en fonction des paramètres du modèle permet de bien visualiser leurs effets sur la distribution de la période.

$$\log P = \log P_0 - 0.5 \log \tau_0 + 0.5 \log(t + \tau_0 - n_0 t_\alpha (1 - e^{-\frac{t}{t_\alpha}})) \quad (5.36)$$

Pour  $t \gg t_\alpha$  :

$$\log P = \log P_0 - 0.5 \log \tau_0 + 0.5 \log(t + \tau_0) \quad (5.37)$$

Lorsque l'on augmente  $\langle P_0 \rangle$  ou lorsque l'on diminue  $\langle \log \tau_0 \rangle$ , la distribution totale est translatée vers les valeurs supérieures de la période. Pour la population observée, cela se traduit par un déplacement du maximum vers les valeurs supérieures, par une diminution du nombre de pulsars de faibles périodes et par l'apparition de pulsars vers des périodes de plus en plus élevées. En augmentant  $t_{\max}$ , on élargit la distribution vers les périodes élevées ce qui entraîne une augmentation de la valeur la plus probable. Enfin, une augmentation des paramètres de dispersion  $\sigma_{\log \tau_0}$  ou  $\sigma_{P_0}$  provoque un élargissement de la distribution qui conduit à un accroissement du nombre de pulsars de faibles périodes ainsi qu'au déplacement du maximum vers les valeurs inférieures.

La figure (5.3) compare les distributions observée et simulée de la dérivée de la période (en échelle logarithmique) pour les modèles A et B. La représentation est satisfaisante pour le modèle A : le test de Kolmogorov donne une adéquation de 30%. La valeur la plus probable de la distribution simulée est  $\ln \dot{P} = -34$  comme pour la distribution observée. On note cependant un léger biais puisque les simulations donnent  $\ln \dot{P} = -35$  plus probable que  $\ln \dot{P} = -33$  alors que c'est le contraire qui est observé. Comme nous le verrons par la suite, nous ne pouvons pas compenser ce biais et garder une bonne représentation de la distribution de la période sans compromettre la qualité de la distribution dans le plan  $P\dot{P} - t_s$ . Nous avons aussi un excès de pulsars de dérivées élevées que l'on peut interpréter comme un déficit observationnel ; notre étude exclut les pulsars dont on ne connaît pas la dérivée première et la plupart sont observés depuis trop peu de temps pour que l'on puisse calculer leur taux de ralentissement si celui-ci est faible. A la différence du modèle A, le modèle B ne permet pas d'obtenir un bon ajustement. La distribution présente un biais vers les valeurs inférieures que nous ne pouvons pas compenser sans détruire l'ajustement de la période. La valeur la plus probable simulée est dans le meilleur des cas  $\ln \dot{P} = -35$ .

En fonction des paramètres du modèle, la dérivée de la période s'écrit :

$$\begin{aligned} \log \dot{P} = & \log P_0 - 0.5 \log \tau_0 \\ & - 0.5 \log(t + \tau_0 - n_0 t_\alpha (1 - e^{-\frac{t}{t_\alpha}})) + \log(1 - n_0 e^{-\frac{t}{t_\alpha}}) - 7.8 \end{aligned} \quad (5.38)$$

où  $P$  est en secondes,  $t$ ,  $\tau_0$  et  $t_\alpha$  en années.

Pour  $t \gg t_\alpha$  :

$$\log \dot{P} = \log P_0 - 0.5 \log \tau_0 - 0.5 \log(t + \tau_0) - 7.8 \quad (5.39)$$

L'accroissement de  $\langle P_0 \rangle$  entraîne une translation de la distribution vers les valeurs supérieures alors qu'une augmentation de  $\langle \log \tau_0 \rangle$ ,  $\sigma_{P_0}$ ,  $\sigma_{\log \tau_0}$  ou  $t_{\max}$  conduit à une translation de la distribution vers les valeurs inférieures. Notons aussi que l'introduction des dispersions  $\sigma_{P_0}$  et  $\sigma_{\log \tau_0}$  permet de modéliser les pulsars observés à faibles taux de ralentissement (et donc à faibles valeurs de  $\log \dot{P}$ ) puisque l'augmentation de ces paramètres provoque un élargissement de la distribution.

La figure (5.4) compare les distributions observée et simulée de la distance héliocentrique pour les modèles A et B. Dans les deux cas les simulations tiennent bien compte des effets de sélection ; la population observée est concentrée dans un rayon de quelques kiloparsecs autour du Soleil alors que la distribution de la population totale est maximale au centre de la Galaxie. Nous avons obtenu une adéquation de 7% pour le modèle A : la distribution présente un biais, le maximum se situant vers 4.5 kpc au lieu de 3.5 kpc.

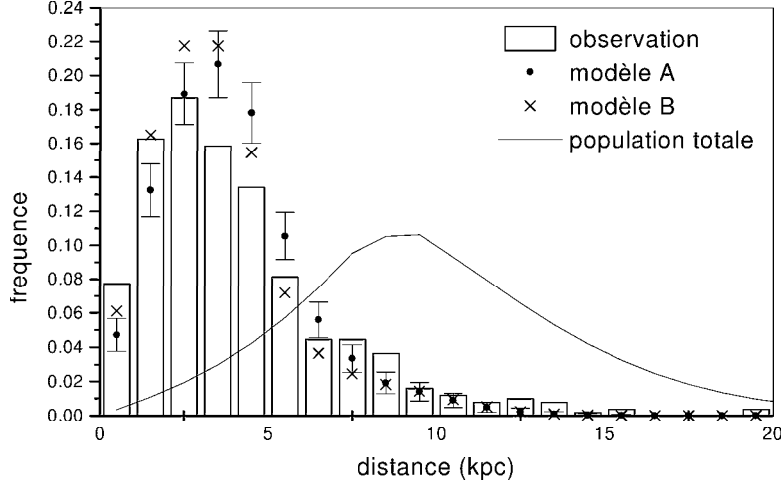


FIG. 5.4: distributions de la distance pour les modèles A (points) et B (croix) comparées à la distribution observée (colonnes). La ligne continue représente la distribution simulée de la population totale. Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion calculée à partir de 500 expériences numériques

Pour le modèle B, nous avons une adéquation inférieure, de l'ordre de 1.3% : le maximum est bien situé mais la distribution présente un déficit au delà de 5.5 kpc. La distance est un paramètre difficile à étudier dans la mesure où elle est calculée à partir de mesures incertaines de la densité d'électrons dans la Galaxie. Malgré tout nous pourrions essayer d'améliorer l'ajustement de sa distribution en tenant compte par exemple des bras spiraux dans le tirage au sort de la position initiale.

Les simulations permettent d'obtenir un autre résultat important : le taux de naissance des pulsars dans la Galaxie. Sa valeur est estimée comme le rapport entre le nombre total de pulsars généré au cours d'une simulation et l'âge de la phase pulsar c'est à dire  $t_{\max}$ . Nous devons néanmoins apporter une correction à ce résultat. En effet, nous avons exclu de notre étude les pulsars dont on ne connaît pas la dérivée première ou la luminosité radio, ne gardant que 491 pulsars sur les 565 objets du catalogue. Pour obtenir le véritable taux de naissance, il faut donc multiplier le résultat précédent par  $\frac{565}{491}$ . Avec  $t_{\max} = 24$  Man, nous obtenons un taux de naissance de 1 pulsar tous les 170 ans en accord avec les résultats Lorimer et al. (1993) [70], 1 pulsar tous les 125-250 ans. Cette valeur est proche du taux de supernovae dans la Galaxie estimée à 1/150 ans par Clark et Caswell (1976) [21]. Avec

$t_{\max} = 100$  Ma le taux de naissance est bien inférieur puisqu'on l'estime à 1 pulsar tous les 550 ans.

Les paramètres du modèle déterminés, notre code numérique nous donne accès à la population réelle des pulsars (figure 5.1). A présent nous ne nous limitons plus à la population observable mais nous prenons aussi en compte la population cachée. La connaissance de la population réelle nous permettra d'une part d'étudier le problème du champ magnétique (partie II) et d'autre part de calculer la contribution des pulsars à l'émission gravitationnelle (partie III).

# Deuxième partie

## Champ Magnétique



# Chapitre 6

## Introduction

Le champ magnétique est certainement la clef de voute de l'évolution des pulsars. Il est responsable du freinage et est à l'origine du cône d'émission. Il joue aussi un rôle important dans les effets de sélection puisque son intensité détermine la nature du rayonnement observé et le taux d'énergie perdue par l'étoile (et donc la durée de la phase pulsar). Actuellement, il n'existe pas de consensus quant à l'origine du champ magnétique. Il peut s'agir du champ stellaire initial densifié lors de l'effondrement de la supernova (par conservation du flux) comme d'un champ crustal généré par l'instabilité thermodynamique des premiers instants ou par la conduction qui apparait 10 à 20 secondes après la naissance. L'évolution du champ magnétique est elle aussi assez mal connue. En particulier, sa décroissance est sujet à controverses. Gunn et Ostricker (1969) [46] ont calculé que  $B$  subissait une dissipation ohmique sur une échelle de temps  $t_D = 4 \times 10^6$  an. La distribution de 41 pulsars dans le plan champ magnétique/âge indicatif ou de façon équivalente dans le plan  $P\dot{P} - t_s$  (3.10 et 3.11), interprétée comme une courbe d'évolution (Gunn et Ostricker, 1970 [47]), est compatible avec cette idée puisque le nuage de points est incliné des valeurs les plus élevées de  $\log P\dot{P}$  vers les valeurs les plus faibles. Plus tard, l'étude du diagramme âge magnétique/âge dynamique par Lyne et al. (1982) [72] a confirmé cette hypothèse : sur un échantillon de 14 pulsars, ils ont pu mettre en évidence une différence croissante entre l'âge cinétique (calculé à partir du mouvement propre des pulsars) et l'âge magnétique. Mais, deux mois après la parution de l'article de 1969, Bayms et al. (1969) [9] ont réfuté le résultat de Gunn et Ostricker (1969) [46] dû selon eux à une mauvaise application du calcul de la conductivité électrique ( $\sigma$ ) de Canuto (1970) [15] qui intervient dans l'expression du temps de dissipation ohmique :

$$t_D = \frac{4\pi}{c^2} \left(\frac{R}{\pi}\right)^2 \sigma \quad (6.1)$$

où  $R$  est le rayon de l'étoile. Après avoir refait le calcul, ils ont obtenu un temps de décroissance supérieur à l'âge de l'Univers et ont conclu que la dissipation du champ était totalement négligeable sur la durée de vie des pulsars. Goldreich et Reisenegger (1992) [45] ont ensuite généralisé ce résultat à un coeur superfluide. Par ailleurs, les calculs de Sang et Channugan (1987) [103] ont montré que même si le champ était confiné dans la croûte, un temps de dissipation ohmique inférieur à  $10^7$  ans était difficilement explicable. Parallèlement, Bailes (1989) [7] a repris l'étude du diagramme âge magnétique/âge dynamique avec un échantillon de pulsars plus important. Loin de confirmer le résultat de Lyne et al. (1982) [72], il est arrivé à la conclusion qu'il n'y avait pas de décroissance du champ magnétique notable pendant la vie des pulsars. Les synthèses de populations de Battacharya et al. (1992) [10], de Hartman et al. (1997) [50] ou encore de Mukherjee et Kembhavi (1997) [86] sont en accord avec ce résultat.

La découverte des pulsars millisecondes, des objets vieux avec un champ magnétique très faible semblait être un argument solide en faveur de la dissipation de celui-ci mais il est maintenant universellement reconnu que la faible valeur de  $B$  est la conséquence de l'accrétion de matière. Elle peut entraîner une dissipation ohmique par chauffage de la croûte ou simplement agir comme un écran.

Par contre, l'observation de nouveaux pulsars confirme chaque fois l'inclinaison observée dans le plan  $P\dot{P}-t_s$ . Essentiellement deux scénarios ont été proposés pour lever cette apparente contradiction. Le premier envisage des processus de dissipation plus lents que la dissipation ohmique en loi exponentielle. Récemment, Urpin et Konenkov (1997) [120] ont étudié le cas d'un champ magnétique crustal dont la conductivité, qui dépend de la température et par conséquent de l'évolution thermique de l'étoile, détermine l'évolution. En considérant trois équations d'état au coeur et deux processus de refroidissement (l'un standard et l'autre accéléré), ils ont obtenu que les observations étaient compatibles avec une équation d'état "dure" et un refroidissement standard. Leur modèle prévoit alors une décroissance exponentielle du champ magnétique pendant environ  $10^5$  ans suivi d'une période de stabilité jusqu'à  $10^9$  ans et d'une phase de décroissance lente en loi de puissance.

Une deuxième interprétation du diagramme a été suggérée par Lyne, Ritching et Smith (1975) [77]. Ils attribuent l'inclinaison observée du nuage de points à la diversité des valeurs initiales de la période et du champ magnétique. Récemment la découverte d'une nouvelle classe d'objets appelés magnétars parce que dotés de champs magnétiques très élevés ( $B \geq 10^{14}$  G) apporte un soutien à cette possibilité. Par des simulations numériques, Duncan et Thompson (1992) [31] ont montré que si l'étoile est initialement

en rotation suffisamment rapide, les effets cumulés de la rotation et de la convection thermique (qui transporte le champ vers les couches externes de l'étoile) engendrent un processus de dynamo capable d'intensifier  $B$  jusqu'à des valeurs supérieures à  $10^{14}$  G. L'effet de dynamo peut avoir lieu dans la mesure où le champ magnétique est sensible à la rotation du fluide interne de l'étoile qui contient des particules chargées à l'état de traces (principalement des protons et des électrons) et par conséquent est conducteur d'électricité. Dans le meilleur des cas, ce phénomène dure environ 20 secondes et conduit à des  $B$  de l'ordre de  $10^{16}$  G. Si la rotation de l'étoile n'est pas assez rapide, ce qui est le cas la plupart du temps, le phénomène ne peut pas être amorcé. Les magnétars ne sont pas détectables en radio : Baring et Harding (1998) [8] ont montré que pour des champs magnétiques supérieurs à la valeur critique  $B_{cr} = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = 4.43 \times 10^{13}$  G la création de paires  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  était remplacée par un phénomène de cascade  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ . En revanche, les SGR (comme "soft gamma repeaters") et les AXP (comme "anomalous X-ray pulsar") sont vraisemblablement des manifestations observables des magnétars. Il n'existe pas encore de certitude quant à l'origine et l'évolution de ces objets mais les observations semblent confirmer le scénario suivant. Si la supernova donne naissance à une étoile à neutrons en rotation suffisamment rapide ( $P \lesssim 1$  ms), des  $B$  supérieurs à  $10^{14}$  G peuvent être générés et confinés dans la croûte solide. Le champ exerce une contrainte qui est relâchée périodiquement par des tremblements (voire des craquements) équivalents à des séismes terrestres de magnitude 14. Les particules piégées dans les lignes de champ magnétique sont alors violemment accélérées et émettent un rayonnement synchrotron de haute énergie, observable sous la forme d'un sursaut gamma. Mais ces secousses périodiques ne parviennent pas à éliminer complètement la contrainte magnétique et des événements plus énergétiques (équivalents à des tremblement de terre de magnitude 22) surviennent environ tous les cent ans lorsque l'ensemble de la croûte se fracture en profondeur sous l'accumulation des contraintes résiduelles. Ces séismes stellaires sont suivis d'un réajustement de la structure de l'étoile et selon Thompson les lignes de champ de polarités opposées peuvent alors s'annihiler. L'énergie ainsi libérée peut être utilisée directement pour accélérer des électrons jusqu'à de hautes énergies donnant lieu à un sursaut gamma important. Elle permet aussi la fusion de certaines régions de la croûte qui se refroidissent lentement en émettant un rayonnement gamma observé sous la forme d'une émission périodique à cause de la rotation. Après cette phase de forte activité sismique (qui dure environ 10 kan), le magnétar se stabilise et devient pour environ 40 kan un AXP. La rotation particulièrement lente observée chez ces objets corrobore cette hypothèse puisque les magnétars sont freinés très rapidement par leur intense champ magnétique. La luminosité X émise par les AXP apporte

un élément nouveau au débat sur la décroissance du champ magnétique. Elle est de l'ordre de  $L_X = 10^{35-36}$  erg c'est à dire bien supérieure à celle qu'ils pourraient émettre dans le cadre du simple freinage magnétique dipolaire. Plusieurs auteurs ont suggéré que la source d'émission pouvait être la dissipation du champ magnétique. Goldreich et Reisenegger (1992) [45] ont passé en revue trois mécanismes de dissipation possibles : ohmique, ambipolaire sinusoïdale et irrotationnelle et effet Hall (sur lesquels nous reviendrons au chapitre suivant). Selon leurs calculs, toutes les étoiles à neutrons sont sensibles à l'effet Hall mais les magnétars subissent en plus une dissipation ambipolaire sinusoïdale. Pour obtenir une énergie de l'ordre de celle qui est observée chez les AXP, Colpi, Geppert et Page (2000) [23] ont calculé que le temps de décroissance doit être de l'ordre de  $10^4$  ans. Une solution alternative à la décroissance du champ magnétique a été proposée par Heyl et Ernquist (1997) [51]. Ils ont montré que pour  $B > 10^{12}$  G, la formation de paquets d'électrons augmente la conductivité le long des lignes de champ et permet d'augmenter le flux thermique. La température à la surface des magnétars est de 40% supérieure à celle des étoiles à neutrons de faible champ magnétique et le refroidissement qui en résulte peut expliquer l'intense émission X observée.

Nos simulations ont montré qu'un modèle où les pulsars naissent avec une diversité de périodes initiales et de champs magnétiques rend mieux compte des observations. Nous nous intéressons maintenant plus spécifiquement au champ magnétique et plusieurs questions se posent. Notre modèle permet-il d'intégrer les SGR et les AXP à la population des pulsars? En d'autres termes, peut-on modéliser des objets avec des champs magnétiques très élevés (des magnétars) et si oui, ont-ils les propriétés observées chez les SGR et les AXP? D'autre part, l'hypothèse d'une dispersion de  $P_0$  et de  $B_0$  suffit-elle, à elle seule, à reproduire l'inclinaison observée dans le plan  $P\dot{P} - t_s$ , comme l'ont soupçonné Lyne et al. (1975) [77]? ou faut-il au contraire introduire une dissipation du champ magnétique?

# Chapitre 7

## Synthèses de Populations

Dans cette étude, nous revoyons l'interprétation du diagramme  $P\dot{P} - t_s$  à partir des synthèses de populations présentées précédemment (Regimbau et de Freitas Pacheco, 2001a [99]). Avec un champ magnétique constant de valeur unique  $B_0$ , les objets simulés sont alignés dans le plan  $P\dot{P} - t_s$  sur une droite de pente nulle, alors que les pulsars observés sont regroupés autour d'une droite inclinée qui part des valeurs élevées de  $\log P\dot{P}$  pour les pulsars jeunes et qui atteint des valeurs faibles de  $\log P\dot{P}$  pour les pulsars âgés. Nous envisageons par la suite deux modèles susceptibles de rendre compte des observations ; le premier considère une distribution de la valeur du champ magnétique à l'origine (modèles A et B) et le second une dissipation dans le temps du champ (modèle C).

### 7.1 Modèle avec Distribution du Champ Magnétique

Dans la théorie du dipôle, le champ magnétique  $B_0$  est lié aux paramètres  $P_0$  et  $\tau_0$  par l'équation (5.35). Nous supposons que  $P_0$  et  $\tau_0$  ne sont pas fixes mais sont distribués autour d'une valeur moyenne  $\langle P_0 \rangle$  et  $\langle \log \tau_0 \rangle$  avec une certaine dispersion  $\sigma_{P_0}$  et  $\sigma_{\log \tau_0}$ . Cette hypothèse permet de modéliser les pulsars avec un faible taux de ralentissement (paragraphe 5.2) et d'expliquer la distribution observée dans le diagramme  $P\dot{P} - t_s$ . Avec des valeurs fixes de  $P_0$  et de  $\tau_0$ , les objets simulés sont distribués autour d'une droite de pente nulle (figure 7.1) mais l'introduction des dispersions  $\sigma_{P_0}$  et  $\sigma_{\log \tau_0}$  rend compte de l'inclinaison observée de la droite.

La distribution des points dans le plan  $P\dot{P} - t_s$  dépend des paramètres

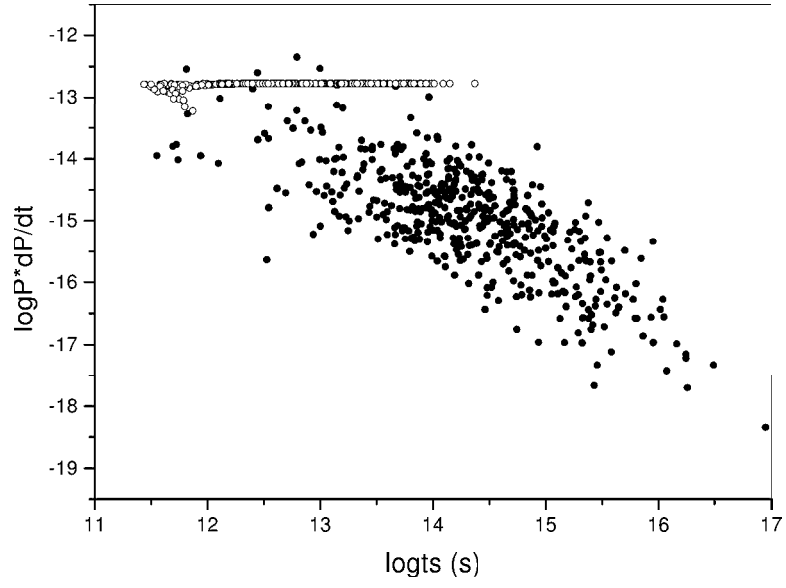


FIG. 7.1: distribution simulée dans le plan  $P(dP/dt) - t_s$  pour un modèle sans dispersions initiales de la période et du champ magnétique (cercles), comparée aux observations (points)

du modèle selon les expressions :

$$\log t_s = \log(t + \tau_0 - n_0 t_\alpha (1 - e^{-\frac{t}{t_\alpha}})) - \log(1 - n_0 e^{-\frac{t}{t_\alpha}}) \quad (7.1)$$

et

$$\log P\dot{P} = 2 \log P_0 - \log \tau_0 + \log(1 - n_0 e^{-\frac{t}{t_\alpha}}) - 7.8 \quad (7.2)$$

dans le cas où  $t \gg t_\alpha$  elles s'écrivent :

$$\log t_s = \log(t + \tau_0) \quad (7.3)$$

et

$$\log P\dot{P} = 2 \log P_0 - \log \tau_0 - 7.8 \quad (7.4)$$

Par la suite, nous présentons de quelle manière la variation de l'un des paramètres affecte la distribution des objets dans le plan  $P\dot{P} - t_s$ . Comme nous l'avons dit précédemment, la pente de la droite moyenne de la distribution est essentiellement liée aux paramètres de dispersion  $\sigma_{P_0}$  et  $\sigma_{\log \tau_0}$ ; plus ceux-ci sont grands et plus elle est importante. De façon beaucoup moins significative, une augmentation de  $\langle P_0 \rangle$ ,  $\sigma_{P_0}$  ou  $\langle \log \tau_0 \rangle$ , ou une diminution de  $t_{\max}$  favorise l'inclinaison de la droite. La dispersion des pulsars autour de la droite moyenne dépend principalement de  $P_0$  et de  $\sigma_{\log \tau_0}$ ; une augmentation de  $\sigma_{\log \tau_0}$  ou  $\sigma_{P_0}$ , ou une diminution de  $\langle P_0 \rangle$ , augmente l'écart à la droite. Notamment, lorsque l'on diminue  $\langle P_0 \rangle$  ou que l'on augmente  $\sigma_{P_0}$ , on obtient des pulsars avec des champs magnétiques de plus en plus faibles ( $\log P\dot{P}$  faible). On évalue cette dispersion par la quantité

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (o_i - (-0.78x_i - 3.86))^2}{491}} \quad (7.5)$$

ou  $y = -0.78x - 3.86$  est l'équation de la droite moyenne,  $x_i$  et  $o_i$  sont respectivement  $\log(t_s)$  et  $\log P\dot{P}$  pour un pulsar  $i$  donné, 491 est le nombre d'objets simulés. Les observations donnent  $\sigma_o = 0.6$ . La position verticale du nuage de point dépend de  $\langle P_0 \rangle$  et de  $\langle \log \tau_0 \rangle$ ; une diminution de  $\langle P_0 \rangle$  ou une augmentation de  $\langle \log \tau_0 \rangle$  implique une diminution des pulsars jeunes à fort champ et une augmentation des pulsars âgés à faible champ. Quant à la position du nuage de points le long de la droite moyenne, elle dépend principalement de  $t_{\max}$  puisqu'une augmentation de ce paramètre entraîne la translation de la distribution vers les valeurs supérieures de  $\log t_s$ .

On évalue la position moyenne du nuage le long de la droite en calculant la valeur moyenne de  $\log t_s$ ,

$$\langle x \rangle = \frac{\sum x_i}{491} \quad (7.6)$$

Pour la population observée,  $\langle x \rangle_o = 14.30$ . On note par ailleurs que  $\log t_s$  ne dépend pas de  $P_0$  mais seulement de  $t$  et  $\tau_0$ .

Les simulations génèrent un certain nombre de pulsars pour lesquels  $t_s > t_{\max}$ . Ces objets auxquels correspond un  $\tau_0$  très élevé (on peut avoir  $\tau_0 > t_{\max}$  si  $\sigma_{\log \tau_0}$  est suffisamment grand) ont un champ magnétique très faible. Leur taux de ralentissement est donc très long et il s'ensuit que  $t_s$  est un mauvais estimateur de leur âge. Leur nombre augmente avec  $\langle \log \tau_0 \rangle$ , plus encore avec  $\sigma_{\log \tau_0}$  et ils tendent à s'aligner le long d'une droite de pente -1. En effet, pour  $\tau_0 \gg t$ ,

$$\log t_s = \log \tau_0 \quad (7.7)$$

et donc

$$\log P\dot{P} = -\log t_s + \text{constante} \quad (7.8)$$

Le modèle A optimise l'adéquation de l'ensemble des distributions : période, dérivée, distance, âge et champ magnétique. En accord avec les observations, les objets simulés sont regroupés dans le plan  $P\dot{P} - t_s$  (figure 7.2) autour d'une droite inclinée qui part des valeurs élevées de  $\log P\dot{P}$  pour les pulsars jeunes et qui atteint des valeurs faibles de  $\log P\dot{P}$  pour les pulsars âgés. Comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, la droite  $t_s = t_{\max}$  constitue une limite au delà de laquelle seuls des objets de très faible champ magnétique sont générés. Avec  $t_{\max} = 24$  Man (modèle A), un certain nombre de pulsars observés ne peuvent pas être simulés et il convient de fixer le paramètre  $t_{\max}$  à 100 Man (modèle B) pour respecter la largeur de la distribution de  $\log t_s$ . Mais, l'augmentation de  $t_{\max}$  détériore l'ajustement de la dérivée de la période en renforçant le biais vers les faibles taux de ralentissement. De plus, pour conserver une bonne adéquation de la distribution de la période il faut compenser l'augmentation de  $t_{\max}$  par une augmentation de  $\langle \log \tau_0 \rangle$ , ce qui accentue encore le biais. Avec  $t_{\max} = 100$  Man, la valeur la plus probable n'est plus  $\log \dot{P} = -34$  mais  $\log \dot{P} = -35$ .

Pour les modèles A et B, la pente de la droite moyenne est  $p_s = -1$  alors que l'on observe  $p_o = -0.8$ . On doit ce décalage aux objets avec  $t_s > t_{\max}$  qui sont alignés sur une droite de pente -1. La dispersion autour de la droite moyenne correspond aux observations avec dans les deux cas,  $\sigma_s = 0.7$  contre  $\sigma_o = 0.6$ . Enfin, la position du nuage de points le long de la droite moyenne



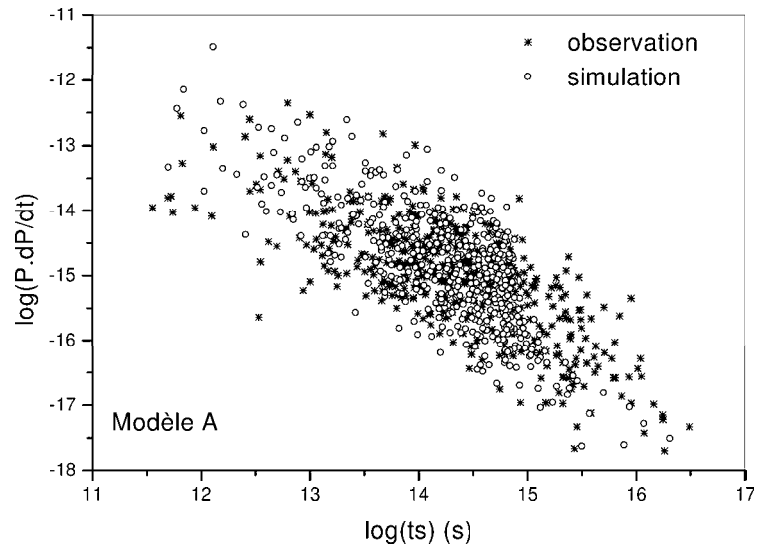


FIG. 7.2: distribution simulée dans le plan  $P(dP/dt)$ - $t_s$  pour le modèle A avec dispersions initiales de la période et du champ magnétique (cercles), comparée aux observations (points).

est respectée pour  $t_{\max} = 24$  Man puisque l'on obtient  $\langle x \rangle_s = \langle x \rangle_o = 14.3$  mais avec  $t_{\max} = 100$  Man la densité d'objets est trop importante pour les âges élevés et l'on a  $\langle x \rangle_s = 14.8$ . A cause de cet excès de pulsars d'âge élevé et de faible champ, l'ajustement est finalement moins bon pour  $t_{\max} = 100$  Man. On peut visualiser ce résultat en traçant de façon indépendante les distributions en fréquence de  $\log t_s$  et de  $\log P\dot{P}$ . L'augmentation de  $t_{\max}$  entraîne un déplacement du maximum vers les valeurs élevées de  $\log t_s$  et vers les valeurs faibles de  $\log P\dot{P}$ .

La solution proposée par le modèle B pour modéliser les objets à faible champ et à âge élevé est très loin d'être satisfaisante d'autant plus qu'il prédit un taux de naissance très faible (1 pulsar/565 ans) et totalement incompatible avec les prédictions des modèles d'évolution stellaire. Par la suite, nous ne retiendrons que le modèle A.

## 7.2 Modèle avec Dissipation du Champ Magnétique

Une autre façon d'expliquer la distribution des pulsars dans le plan  $P\dot{P}-t_s$  est de considérer une dissipation du champ magnétique. On interprète alors l'inclinaison de la droite moyenne comme la manifestation de la décroissance du champ.

Si l'on suppose une dissipation exponentielle de la forme,

$$B(t) = B_0 e^{-\frac{t}{t_D}} \quad (7.9)$$

où  $t_D$  est le temps caractéristique de dissipation, la relation (3.10) devient :

$$P\dot{P} = K B_0^2 e^{-\frac{2t}{t_D}} \sin^2 \alpha(t) \quad (7.10)$$

L'équation (7.10) s'intègre pour donner l'expression de la période :

$$P^2 = P_0^2 + 2K B_0^2 \left( \frac{t_D}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{t_D}}) - \frac{n_0 t_D t_\alpha}{2t_\alpha + t_D} (1 - e^{-\frac{2t_\alpha + t_D}{t_D t_\alpha} t}) \right) \quad (7.11)$$

avec  $P_0$ ,  $t_D$ ,  $t_\alpha$ ,  $t$  en s ou

$$P = P_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_0} \left( \frac{t_D}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{t_D}}) - \frac{n_0 t_D t_\alpha}{2t_\alpha + t_D} (1 - e^{-\frac{2t_\alpha + t_D}{t_D t_\alpha} t}) \right)} \quad (7.12)$$

avec  $P_0$  en s,  $t_D$ ,  $t_\alpha$ ,  $\tau_0$  et  $t$  en années.

Pour visualiser l'effet de la dissipation du champ magnétique, il faut tracer la courbe d'évolution de  $B$  pour des valeurs fixes des paramètres  $P_0$  et  $\tau_0$  (et par conséquent  $B_0$ ). De façon équivalente, on se place dans le plan  $P\dot{P} - t_s$ .

Dans ce plan, on distingue trois régions distinctes.

- dans la zone où  $t \ll t_\alpha \ll t_D$ ,

$$e^{-\frac{2t}{t_D}} \simeq 1 \quad (7.13)$$

et l'équation (7.10) s'écrit :

$$P\dot{P} = KB_0^2 \sin^2 \alpha(t) \quad (7.14)$$

- dans la zone où  $t_\alpha \ll t \ll t_D$ , on a en plus :

$$\sin^2 \alpha(t) \simeq 1 \quad (7.15)$$

et l'équation (7.10) s'écrit :

$$P\dot{P} = KB_0^2 \quad (7.16)$$

La courbe présente ici un plateau.

- pour  $t \gg t_\alpha$ , l'équation (7.10) s'écrit :

$$P\dot{P} = KB_0^2 e^{-\frac{2t}{t_D}}$$

c'est à dire

$$\log P\dot{P} = \log(KB_0^2) - \frac{2 \log e}{t_D} t \quad (7.17)$$

$$\log P\dot{P} = \log(KB_0^2) - \frac{2 \log e}{t_D} 10^{\log t} \quad (7.18)$$

dans la zone où  $t \gg t_D \gg t_\alpha$ ,

$$\log t_s = \log(t + \tau_0) \quad (7.19)$$

et (7.18) devient :

$$\log P\dot{P} = (\log(KB_0^2) + \frac{2 \log e}{t_D} \tau_0) - \frac{2 \log e}{t_D} 10^{\log t_s} \quad (7.20)$$

L'hypothèse d'une dissipation du champ, ne permet pas à elle seule d'expliquer la distribution observée dans le plan  $P\dot{P} - t_s$ . En effet, si ce modèle parvient assez bien à reproduire l'inclinaison de la droite moyenne, il ne peut en aucun cas rendre compte de la dispersion autour de cette droite. Qu'il y ait ou non dissipation, l'hypothèse d'une distribution du champ magnétique à l'origine s'impose comme la seule capable d'expliquer la dispersion autour de la droite moyenne. Ceci nous conduit à tester un modèle mixte qui combine dissipation et dispersion du champ magnétique.

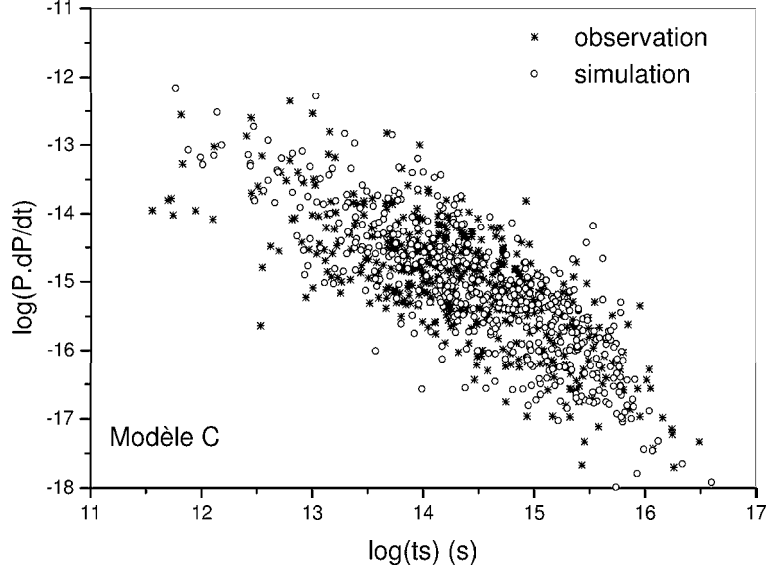


FIG. 7.3: distribution simulée dans le plan  $P(dP/dt)$ - $t_s$  pour le modèle C avec dispersions initiales de la période et du champ magnétique et dissipation du champ (cercles), comparée aux observations (points).

### 7.3 Modèle avec Distribution et Dissipation du Champ Magnétique

Le principal problème du modèle A est de ne pas rendre compte de la population observée avec  $t_s > t_{\max}$  et l'augmentation de  $t_{\max}$  (modèle B), n'apporte pas une solution satisfaisante pour les raisons évoquées plus haut. Au contraire, l'introduction d'une dissipation de  $B$ , permet de simuler les objets d'âge élevé et de faible champ situés en bas à droite du diagramme  $PP - t_s$ . Afin de modéliser toute la gamme des valeurs observées de  $\log t_s$ , il convient de fixer le temps de dissipation  $t_D$  à environ 15 Man si on considère une durée de vie moyenne de 25 Man. Au deçà, on a trop de pulsars avec un âge élevé et un champ magnétique faible et au delà, on ne parvient pas à simuler les objets observés avec les âges les plus élevés et les champs les plus faibles.

Le modèle C (tableau 7.1) donne le meilleur ajustement pour  $t_D = 15$  Man et  $t_{\max} = 25$  Man. On remarque que l'introduction d'une dissipation du champ magnétique ne modifie pas la distribution de la période initiale. En

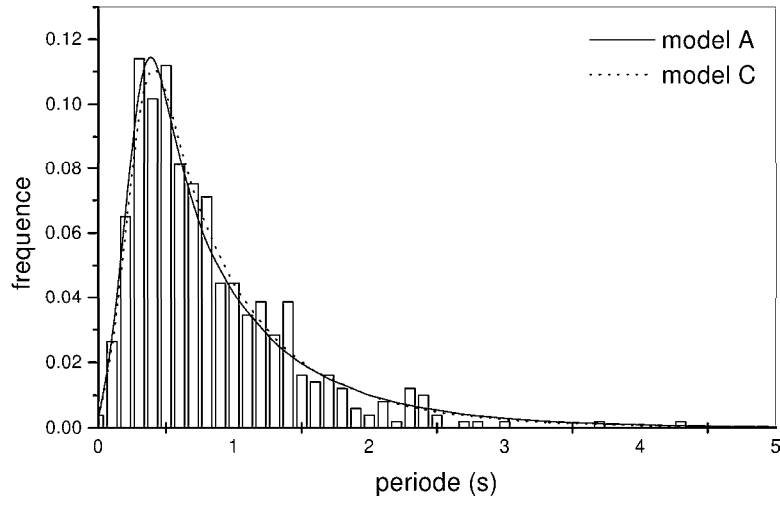


FIG. 7.4: distributions de la période pour les modèles A (trait plein) et C (pointillés) comparées à la distribution observée (colonnes).

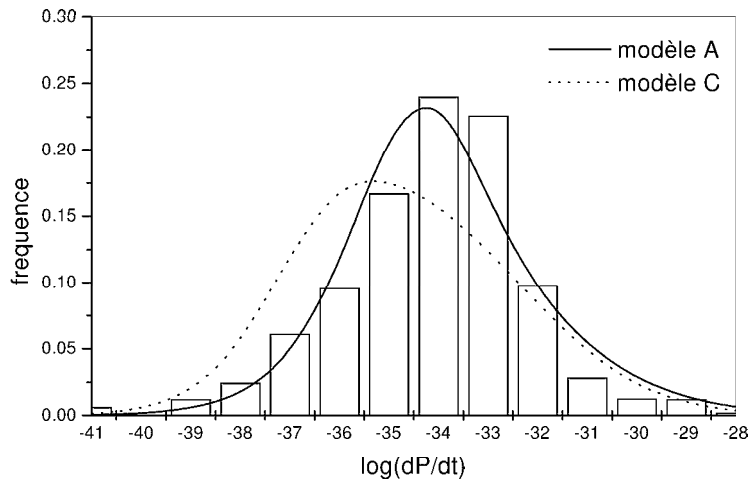


FIG. 7.5: distributions de la dérivée de la période pour les modèles A (trait plein) et C (pointillés) comparées à la distribution observée (colonnes).

Paramètres	Modèle A	Modèle C
$t_{\max}$ (Man)	24	100
$t_D$ (Man)	$\infty$	15
$P_0$ (ms)	$290 \pm 20$	$290 \pm 20$
$\sigma_{P_0}$	$100 \pm 20$	$100 \pm 20$
$\ln \tau_0$ (an)	$9 \pm 0.5$	$10 \pm 0.5$
$\sigma_{\ln \tau_0}$	$3.6 \pm 0.2$	$2.6 \pm 0.2$

TAB. 7.1: paramètres optimaux pour les modèles A et C

revanche, le freinage magnétique étant moindre, la moyenne de  $\tau_0$  est supérieure à celle du modèle A et sa dispersion plus faible. La distribution de la période (figure 7.4) ne change pas par rapport au modèle A (toujours 60% d'adéquation) et on note par contre une légère amélioration de la distribution de la distance puisque l'on obtient 10% de compatibilité avec les observations (contre 7% pour le modèle A). Avec la dissipation du champ magnétique, le taux de ralentissement diminue et avec lui la luminosité. Les pulsars observables sont donc plus proches du Soleil ce qui corrige le biais du modèle A vers les distances élevées. En revanche, même s'il permet de supprimer la coupure à  $t_s = t_{\max}$ , le modèle C (comme le modèle B) génère un trop grand nombre d'objets d'âge élevé et de faible champ (figure 7.3) et ne permet pas un bon ajustement des distributions de  $\log t_s$  et de  $\log P\dot{P}$ . L'excès de pulsars à faible champ détériore aussi la qualité de l'ajustement de la distribution de  $\log \dot{P}$  (figure 7.5) puisque l'on obtient trop de pulsars à faible taux de ralentissement. Il en découle un déplacement du maximum vers  $\ln \dot{P} = -35$  et un déficit d'objets au niveau de ce même maximum.

Devant la difficulté à obtenir un bon ajustement de  $\ln \dot{P}$  et du diagramme  $P\dot{P} - t_s$ , nous avons considéré une dissipation du champ magnétique plus douce en loi de puissance. Mais comme dans le cas d'une décroissance exponentielle, ce modèle génère trop de pulsars d'âge élevé et de faible champ et l'on a un biais vers les valeurs les plus faibles de la distribution de la dérivée. Par ailleurs, il faut noter que l'interprétation du diagramme  $P\dot{P} - t_s$  comme la manifestation d'une dissipation en loi de puissance du champ magnétique donne des valeurs de l'indice de freinage complètement incompatibles avec celles qui sont observées.

Un ajustement par moindre carré de la distribution observée donne :

$$\log(P\dot{P}) = b \log\left(\frac{P}{2\dot{P}}\right) + a \quad (7.21)$$

où  $a = -3.86$  cgs et  $b = -0.78$  cgs.

Après intégration on obtient l'expression de la période :

$$P(t) = \left( \frac{2}{1+b} \frac{10^{\frac{a}{1+b}}}{2^{\frac{b}{1+b}}} t + P_0^{\frac{2}{1+b}} \right)^{\frac{1+b}{2}} \propto t^{\frac{(1+b)}{2}} \propto t^{0.11} \quad (7.22)$$

et celle de l'indice de freinage :

$$N = \frac{(3+b)}{(1+b)} \approx 10 \quad (7.23)$$

A cause de la dissipation du champ, le freinage est ralenti dans le temps et  $N$  est environ trois fois plus grand que l'indice prédit par le modèle standard. Ce résultat est en totale contradiction avec la mesure des indices de freinage  $N < 3$  (tableau 4.1).

Nous rejetons aussi le scénario selon lequel tous les pulsars naissent comme des magnétars et subissent par la suite une dissipation de leur champ magnétique. Nous avons effectué des simulations pour les modèles développés par Colpi et al. (2000) [23] avec une dissipation du champ en loi de puissance et dont les équations sont les suivantes :

$$B(t) = B_0 \left( 1 + \frac{t}{t_D} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (7.24)$$

où

$$t_D = (a\alpha B_0^\alpha)^{-1} \quad (7.25)$$

En supposant que l'axe du dipôle et l'axe de rotation sont orthogonaux, l'intégration de

$$P\dot{P} = KB^2 = KB_0^2 \left( 1 + \frac{t}{t_D} \right)^{-\frac{2}{\alpha}} \quad (7.26)$$

donne l'expression de la période :

$$P^2 = P_0^2 + 2KB_0^2 t_D \frac{\alpha}{\alpha-2} \left( \left( 1 + \frac{t}{t_D} \right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} - 1 \right) \quad (7.27)$$

soit

$$P = P_0 \sqrt{1 + \frac{t_D}{\tau_0} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left( 1 - \left( 1 + \frac{t}{t_D} \right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} \right)} \quad (7.28)$$

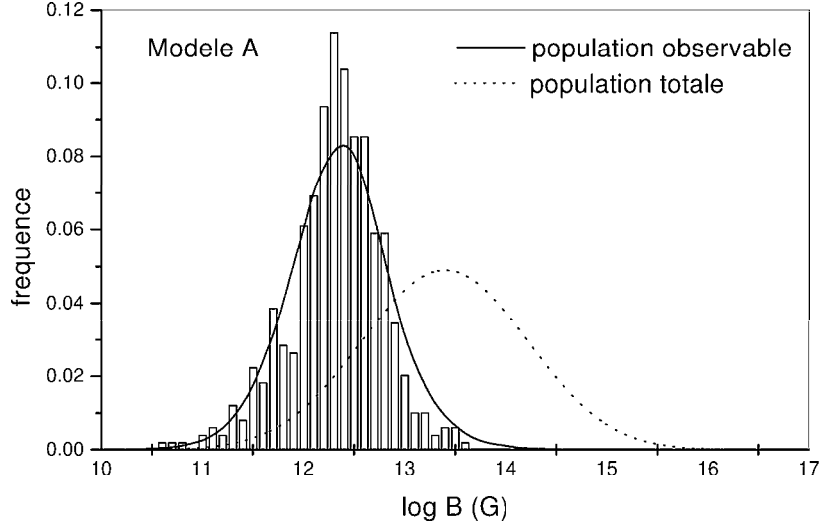


FIG. 7.6: pour le modèle A, distributions du champ magnétique observable (trait plein) et réelle (pointillés), comparées à la distribution observée (colonnes).

Pour les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $a$  correspondants aux différents mécanismes de dissipation du champ (diffusion ambipolaire irrotationnelle et solénoïdale et cascade Hall), et pour des valeurs du champ magnétique à l'origine de l'ordre de  $\log B_0 = 14, 15$  ou  $16$ , considérées par Colpi et al. (2000) [23], on obtient une population de pulsars qui atteint très vite des périodes très élevées (supérieures à 10 s). Un modèle, selon lequel tous les pulsars naissent comme des magnétars puis subissent une dissipation de leur champ magnétique ne peut en aucun cas reproduire la distribution observée de la période.

Finalement, le meilleur modèle reste sans conteste le modèle A. En accord avec les synthèses de populations de Battacharya et al. (1992) [10], de Hartman et al. (1997) [50] et de Mukherjee et Kembhavi (1997) [86], nous obtenons que le champ magnétique ne subit pas de dissipation notable pendant la durée de vie des pulsars et le diagramme  $P\dot{P} - t_s$  peut être interprété uniquement par la dispersion des valeurs initiales comme l'avaient soupçonné Lyne, Ritching et Smith (1975) [77].



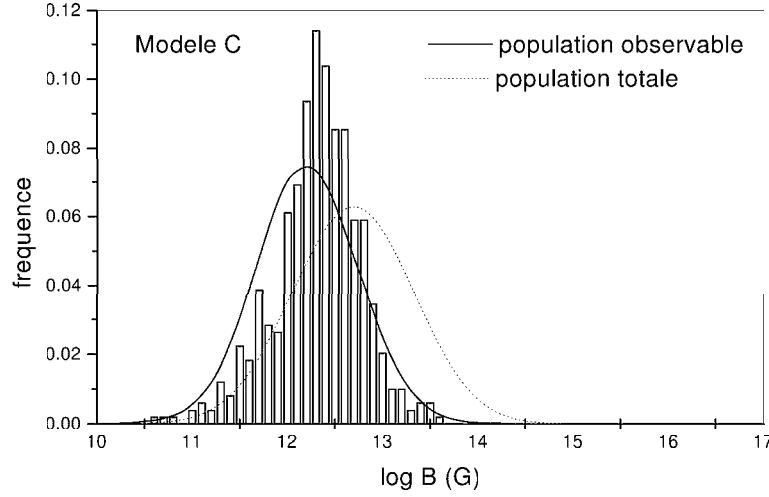


FIG. 7.7: pour le modèle C, distributions du champ magnétique observable (trait plein) et réelle (pointillés), comparées à la distribution observée (colonnes).

## 7.4 Magnétars

Un résultat intéressant concerne le champ magnétique. La valeur moyenne du champ de la population observable simulée correspond bien à la valeur canonique déduite des observations ( $\log B \sim 12$ , où  $B$  est en Gauss) puisque l'on obtient  $\langle \log B \rangle_o = 12.4$  pour le modèle A (figure 7.6) et  $\langle \log B \rangle_o = 12$  pour le modèle C (figure 7.7). Par contre, celle de la population totale est plus élevée avec  $\langle \log B \rangle_t = 13.4$  pour le modèle A (figure 7.6) et  $\langle \log B \rangle_t = 12.7$  pour le modèle C (figure 7.7). Ce résultat confirme la thèse de l'existence des magnétars, des étoiles à neutrons avec un champ magnétique exceptionnel. Selon notre modèle, ils s'intègrent tout naturellement aux pulsars radio et ne constituent pas une population à part. Les pulsars naissent avec des champs magnétiques d'intensités différentes et la population des magnétars n'est autre que la sous-population de pulsars nés avec les champs magnétiques les plus élevés. Ils ne sont pas observés parce qu'étant freinés très vite, ils atteignent rapidement des périodes très longues pour lesquelles la luminosité est très faible ( $L_r \sim e^{-\beta P}$ ) et le cône d'émission très étroit. Ce dernier cas est très bien illustré par le pulsar radio J2144-3933 (Young, Manchester & Johnson, 1999 [122]) de période 8.51 s et dont la pulsation a une largeur à mi-hauteur de seulement un degré de longitude.

On estime la proportion de pulsars avec  $\log B > 14$  à 23% pour le modèle

objets	$P$ (s)	$\log \dot{P}$	$\log t_s$ (an)	référence
SGR 1806-20	7.47	-10.081	3.176	Kouveliotou et al. (1998) [60]
1E 1841-045	11.77	-10.328	3.620	Vasisht et Gotthelf (1997) [121]
1E 1048-59	6.45	-10.657	3.689	Oosterbroek et al. (1998) [90]
4U 0142+61	8.68	-11.638	4.800	Mereghetti et Stella (1995) [84]
1E 2259+58	6.98	-12.136	5.202	Mereghetti et Stella (1995) [84]
SGR 1900+14	5.16	-9.958	2.893	Kouveliotou et al. (1999) [61]
1RX J1708-40	11	-10.632	3.895	Israel et al. (1999) [56]

TAB. 7.2: propriétés des possibles magnétars

A et à 8.5% pour le modèle B malgré la dissipation du champ. Il faut noter que le taux de naissance des magnétars déduit du modèle A, 1 magnétar tous les 750 ans, est tout à fait compatible avec les estimations de Duncan (1998) [30] qui prévoient 1 magnétar tous les 1000 ans.

Les simulations numériques nous donnent accès aux propriétés statistiques des magnétars et il est intéressant de vérifier qu'elles sont bien compatibles avec les données observées des SGR et des AXP. Pour cette étude, nous ne considérons plus que le modèle A qui est sans ambiguïté le plus réaliste.

On connaît actuellement 12 AXP ou SGR dont les propriétés sont reportées dans le tableau (7.2). D'après nos simulations, ils représentent seulement 15% de la population totale des magnétars avec  $P < 11$  s. En effet, le nombre d'objets avec  $\log B > 14$  et une période inférieure à  $P$  est donné avec une bonne approximation par la relation :

$$N(P) = 0.85P^{1.85} \quad (7.29)$$

Pour  $P = 11$  s on obtient 72 pulsars et la plupart ont un champ magnétique dans l'intervalle  $14 < \log B < 15.5$ . Les magnétars avec champ plus élevé sont ralentis tellement rapidement que leur nombre devient non négligeable à partir de  $P = 130$  s seulement.

La figure (7.8) représente la période moyenne en fonction de l'âge magnétique moyen pour différents intervalles de  $\log B$ . La position des sept AXP ou SGR dont on connaît la dérivée première et pour lesquels on a une estimation de l'âge magnétique a aussi été reportée. On note que les données sur les AXP et les SGR sont compatibles avec les propriétés statistiques déduites des simulations, ce qui confirme l'idée que ces objets sont bien des magnétars.

Selon notre étude, un modèle avec dispersion et sans dissipation (ou dissipation lente par rapport à la durée de la phase pulsar) du champ magnétique initial permet de mieux rendre compte des observations. Les pulsars naissent avec des  $B$  différents, ce qui explique l'inclinaison de la distribution dans le plan  $P\dot{P}-t_s$ . Les magnétars représentent la sous-population de pulsars

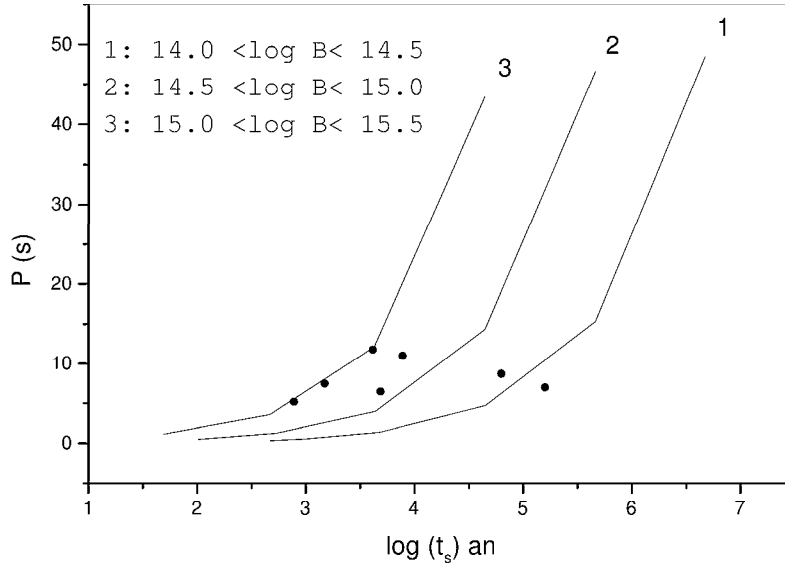


FIG. 7.8: période moyenne en fonction de l'âge indicatif déduit des simulations (traits pleins) et pour les possibles magnétars (cercles)

nés avec les champs magnétiques les plus élevés. Le fait que ceux que nous connaissons (les SGR ou les AXP) soient des pulsars jeunes n'est donc pas la conséquence d'une décroissance rapide du champ magnétique mais plutôt le résultat d'un biais observationnel. Les manifestations observables des magnétars (les bursts pour les SGR et l'émission X pour les AXP) n'auraient lieu que pendant les premières années. Enfin, devant la difficulté à représenter correctement les pulsars avec les champs magnétiques les plus faibles, on peut se demander s'il ne s'agit pas d'une population différente ; par exemple, des pulsars ayant appartenu à un système binaire qui auraient subi une décroissance de leur champ magnétique par accréation de matière en provenance du compagnon.



**Troisième partie**  
**Emission Gravitationnelle**

# Chapitre 8

## Introduction

Les premiers interféromètres géants VIRGO, LIGO, GEO ou TAMA destinés à la détection “directe” des ondes gravitationnelles sont déjà ou seront très prochainement opérationnels. Pendant les premières années, l’effort principal sera de comprendre les sources de bruits, de les minimiser et d’incorporer ces connaissances aux algorithmes de détection. Et ceci pour se donner le plus de chance de détecter un signal réel. Mais une détection en elle même n’aurait pas de sens si nous n’étions pas capables de l’interpréter et il est tout aussi important de développer dès maintenant des modèles précis des différentes sources astrophysiques possibles. D’autre part, les méthodes de détection étant basées sur la technique dite du “filtre adapté”, elles nécessitent une très bonne connaissance de la forme du signal recherché.

Dans cette partie nous utiliserons notre modèle de la population réelle des pulsars normaux de la Galaxie pour calculer sa contribution à l’émission gravitationnelle et nous étudierons la détectabilité de ce rayonnement par des interféromètres laser comme VIRGO. L’un des défis majeurs auquel VIRGO devra faire face sont les temps de calculs considérables nécessaires à traiter les données. Nous montrerons que les simulations numériques donnant accès aux propriétés statistiques de la sous-population détectable par VIRGO permettent d’optimiser la recherche des sources individuelles dans l’espace des fréquences et dans les directions du ciel.



# Chapitre 9

## Théorie des Ondes Gravitationnelles

En 1916, Albert Einstein prédit l'existence des ondes gravitationnelles dans le cadre de sa théorie de la Relativité Générale : ce sont des déformations de l'espace temps qui se propagent à la vitesse de la lumière. Comme les ondes électromagnétiques sont dûes à l'accélération de charges, elles sont produites quand de la matière est accélérée de façon non symétrique.

### 9.1 Cadre de la Relativité Générale

Les équations d'Einstein formalisent l'idée que la géométrie de l'espace-temps est déterminée par son contenu matériel et énergétique et s'écrivent sous forme tensorielle :

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = kT_{ij} \quad i, j = 0..3 \quad (9.1)$$

où les coefficients métriques  $g_{ij}$  sont des fonctions des coordonnées spatiales  $x^1, x^2, x^3$  et de la coordonnée temporelle  $x^0$ . Les équations (9.1) généralisent l'équation de Poisson reliant le potentiel Newtonien dont dérive la force gravitationnelle à la densité de matière. Le premier membre de (9.1) est purement géométrique. Le tenseur de Ricci  $R_{ij}$  et sa trace  $R$ , la courbure scalaire, mesurent la courbure de l'espace-temps et s'expriment en fonction du tenseur métrique  $g_{ij}$  et de ses dérivées. Le second membre où  $k = \frac{8\pi G}{c^4}$  est la constante d'Einstein, décrit le contenu matériel et énergétique du milieu via le tenseur énergie-impulsion  $T_{ij}$ . Une dérivation détaillée de l'équation (9.1) peut être obtenue dans Misner, Thorne et Wheeler (1973) [85].



## 9.2 Ondes Gravitationnelles

Intéressons nous aux solutions des équations d'Einstein dans le vide, c'est à dire pour  $T_{ij} = 0$ .

La métrique  $g_{ij}$  associée à une faible perturbation de la métrique  $g^\circ_{ij}$  peut s'écrire sous la forme :

$$g_{ij} = g^\circ_{ij} + h_{ij} \quad (9.2)$$

où le terme de perturbation  $h_{ij}$  est tel que

$$\begin{cases} |h_{ij}| \ll |\eta_{ij}| \\ |h_{ij}|^2 \ll |h_{ij}| \end{cases} \quad (9.3)$$

Dans notre système solaire l'espace-temps est en bonne approximation l'Univers plat de Minkowski caractérisé par le tenseur métrique  $\eta_{ij} = (1, -1, -1, -1)$ . Par la suite, on prendra  $g^\circ_{ij} = \eta_{ij}$ .

Sous les conditions (9.3), la perturbation  $h_{ij}$  obéit à l'équation d'Einstein linéarisée au premier ordre. Pour obtenir une expression explicite de  $h_{ij}$ , il est nécessaire de faire ici un choix de jauge. La mieux adaptée est la jauge TT ("transverse/traceless") dans laquelle les coordonnées sont définies par les géodésiques de masses tests en chute libre.

Dans la jauge TT et dans l'approximation linéaire, les équations d'Einstein dans le vide prennent la forme d'une équation d'onde :

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2}) h_{ij} = 0 \quad (9.4)$$

La solution est une onde transverse qui se propage à la vitesse de la lumière.

Pour une onde se propageant selon l'axe des z, le tenseur  $h_{ij}$  s'écrit :

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{yx} & h_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

Pour satisfaire à la condition de trace nulle, on doit avoir

$$h_{xx} = -h_{yy} \quad (9.6)$$

et le tenseur métrique Riemannien étant symétrique

$$h_{xy} = h_{yx} \quad (9.7)$$

On obtient par conséquent deux états de polarisations indépendants, perpendiculaires à l'axe des  $z$  que l'on note en général

$$\begin{cases} h_+ = h_{xx} = -h_{yy} \\ h_\times = h_{xy} \end{cases} \quad (9.8)$$

Thorne (1980) [117] a montré que tant que la taille de la source émettrice était très petite devant la longueur d'onde ( $R \ll \lambda$  pour une étoile de rayon  $R$ ), l'approximation dite quadripolaire obtenue par Einstein (1918) dans le cadre des champs faibles et des vitesses non relativistes reste valable. Dans cette approximation, on peut développer la distribution de masse en moments multipolaires dont la variation génère des ondes gravitationnelles. Le moment dipolaire ne contribuant pas au rayonnement gravitationnel (par conservation de l'impulsion), on montre que pour des vitesses faibles devant la vitesse de la lumière, la plus grande contribution est donnée par la variation du moment quadripolaire.

On a alors :

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r} [P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl}] \ddot{D}_{kl} \quad (9.9)$$

où  $r$  est la distance à la source,  $P_{ij}$  est le projecteur transverse à la ligne de visée donné par :

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \quad (9.10)$$

et  $D_{ij}$  est le tenseur du moment quadripolaire de masse évalué au temps retardé ( $t - \frac{r}{c}$ ). Dans l'approximation des champs faibles, le moment quadripolaire de masse est donné par son approximation Newtonienne :

$$D_{ij} = \int \rho(t) (x_i x_j - \frac{1}{3} x_k^2 \delta_{ij}) dV \quad i, j = 1..3 \quad (9.11)$$

où  $\rho$  est la densité de matière. Le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$  assure que  $D_{ij}$  est de trace nulle.

La quantité  $D_{ij}$  est liée au tenseur des moments d'inertie

$$I_{ij} = \int \rho(t) (x_i^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dV \quad (9.12)$$

par la relation

$$D_{ij} = \frac{1}{3} I_k^k \delta_{ij} - I_{ij} \quad (9.13)$$

Dans l'approximation quadripolaire, le taux d'énergie émis par la source sous la forme d'ondes gravitationnelles s'écrit :

$$\frac{dE_{gw}}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \ddot{\bar{D}}_{ij}^2 \quad (9.14)$$

Notons que dans cette expression, le facteur  $\frac{1}{c^5}$  apparait à la puissance cinq. Ceci et la petitesse de la constante de gravitation  $G$  déterminent la faiblesse extrême de l'émission. Dans le système solaire, il n'est pas possible de ressentir les effets des ondes gravitationnelles puisqu'un niveau perceptible de radiation est produit seulement quand de très grandes masses sont accélérées dans des champs gravitationnels très forts. Faute de preuves observationnelles, le concept de rayonnement gravitationnel est resté longtemps empreint de scepticisme. Mais au début des années 60 Hermann Bondi a démontré que le phénomène était bien réel et qu'il ne s'agit pas d'un artefact lié au choix du système de coordonnées. Enfin, en 1974, la découverte du pulsar binaire PSR B1913+16 par Hulse et Taylor (prix Nobel 1994) a confirmé de façon "indirecte" l'existence des ondes gravitationnelles. Dans un système double d'étoiles à neutrons où les corps sont gravitationnellement très concentrés et en mouvement très rapide la perte d'énergie par rayonnement gravitationnel est perceptible. Elle conduit à un resserrement de l'orbite et les étoiles spiralent l'une autour de l'autre. Grâce aux pulsations radio, on a pu suivre l'évolution de PSR B1913+16 sur son orbite et le resserrement mesuré correspond avec une très bonne précision à celui prédit par la Relativité Générale.

### 9.3 Etoiles à Neutrons en Rotation

Une étoile à neutrons en rotation émet des ondes gravitationnelles si elle est tri-axiale ou si ses axes de symétrie et de rotation ne sont pas alignés. La déformation de l'étoile peut être due à :

- des irrégularités de la croûte solide appelées "montagnes"
- une dissymétrie initiale, développée pendant la période de cristallisation et entretenue par des forces de pression sur la croûte solide
- un champ magnétique très intense dont l'axe n'est pas aligné avec l'axe de rotation (Bonazzola et Gourgoulhon, 1996 [13])
- une accréation de matière (Bildsten, 1998 [12]). La matière accrétée de façon non-symétrique à cause du fort champ magnétique est rapidement rejetée mais entraîne un déséquilibre dans la distribution de la température à la surface de l'étoile. Le gradient de densité qui accompagne la modification de la composition de la croûte crée un moment

quadripolaire de l'ordre de  $10^{37} - 10^{38} \text{ g cm}^{-2}$  si l'on néglige la réponse élastique de la croûte et de 20 à 50 fois plus petit si l'on en tient compte.

Les étoiles à neutrons sont des corps relativistes pour lesquels l'approximation quadripolaire précédente n'est pas valable a priori et il convient de remplacer le moment quadripolaire Newtonien par celui de Thorne (1980) [117] dans l'équation (9.9). Ce tenseur noté  $\mathcal{I}_{ij}$  est défini à partir du développement en  $\frac{1}{r}$  de l'élément de métrique  $g_{00}$ , exprimé dans un repère centré à l'origine de l'étoile et asymptotiquement cartésien, dans la zone proche des champs faibles où  $\max(R, \frac{GM}{c^2}) < r < \lambda$  :

$$g_{00} = -1 + 2\frac{M}{r} + \frac{\alpha_1}{r^2} + \frac{1}{r^3}[3\mathcal{I}_{ij}\frac{x^i x^j}{r^2} + \beta_{1i}\frac{x^i}{r} + \alpha_2] + O(\frac{1}{r^4}) \quad (9.15)$$

Notons que la zone proche des champs faibles est bien définie même dans le cas extrême des pulsars millisecondes. De (9.15) on déduit :

$$\mathcal{I}_{ij} = \frac{1}{3} \frac{r^2}{x^i x^j} (g_{00}^{(3)} - \beta_{1i} \frac{x^i}{r} - \alpha_2) \quad (9.16)$$

où  $g_{00}^{(3)}$  est le coefficient du troisième ordre du développement (9.15),  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\beta_{1i}$  des constantes et  $M$  la masse totale de l'étoile.  $\mathcal{I}_{ij}$  est un tenseur symétrique de trace nulle et dans la limite des champs gravitationnels faibles, on retrouve le tenseur Newtonien.

Les étoiles à neutrons sont faiblement déformées et  $\mathcal{I}_{ij}$  peut être décomposé linéairement comme la somme de deux moments, l'un dû à la rotation et l'autre à la distorsion que peut produire par exemple le champ magnétique.

On écrit alors :

$$\mathcal{I}_{ij} = \mathcal{I}_{ij}^{rot} + \mathcal{I}_{ij}^{dist} \quad (9.17)$$

où  $\mathcal{I}_{ij}^{rot}$  est une fonction quadratique de la vitesse de rotation  $\Omega$ . Dans le cas d'une rotation uniforme,  $\dot{\mathcal{I}}_{ij}^{rot} = 0$  et l'équation (9.9) se réduit à :

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{rc^4} [P_i^{\ k} P_j^{\ l} - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl}] \ddot{\mathcal{I}}_{kl}^{dist}(t - \frac{r}{c}) . \quad (9.18)$$

Faisons maintenant deux hypothèses sur le processus de distorsion :

- il existe un repère privilégié  $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, c)$  dans la zone proche des champs faibles dans lequel  $\mathcal{I}_{ij}^{dist}$  est diagonal et où deux des valeurs propres sont égales. Compte tenu de la condition de trace nulle, il s'écrit :

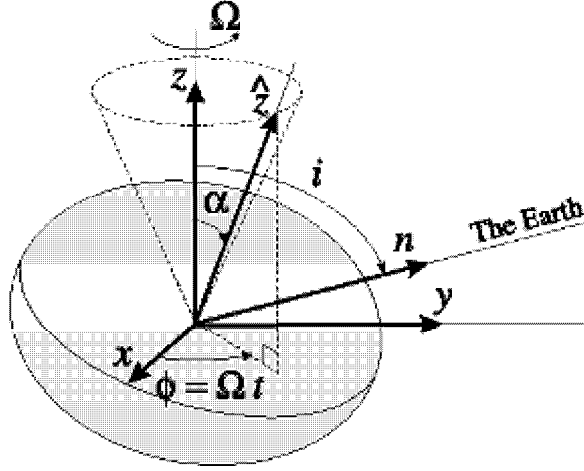


FIG. 9.1: repère propre  $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  et repère extérieur à l'étoile  $(t, x, y, z)$  dont l'axe  $z$  coïncide avec l'axe de rotation

$$\mathcal{I}_{\hat{t}\hat{t}}^{dist} = \begin{pmatrix} -\mathcal{I}_{\hat{z}\hat{z}}^{dist}/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{I}_{\hat{z}\hat{z}}^{dist}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_{\hat{z}\hat{z}}^{dist} \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

- la déformation suit le mouvement de l'étoile et l'axe  $\hat{z}$  tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$  à un angle fixe  $\alpha$  de l'axe de rotation  $z$  (figure 9.1).

Pour calculer (9.9) dans le repère de l'observateur, exprimons d'abord  $\mathcal{I}_{ij}^{dist}$  dans le repère  $(t, x, y, z)$  extérieur à l'étoile et dont l'axe  $z$  coïncide avec l'axe de rotation. La transformation  $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \rightarrow (t, x, y, z)$  est la composition d'une rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $x$  et d'une rotation d'angle

$$\varphi(t) = \Omega(t - t_0) \quad (9.20)$$

autour de  $z$  (figure 9.1). La matrice de passage s'écrit :

$$M_p = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) & 0 \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

En appliquant la formule de transformation des matrices,

$$\mathcal{I}^{dist} = M_p \times \hat{\mathcal{I}}^{dist} \times {}^t M_p \quad (9.22)$$

où  $\mathcal{I}^{dist}$  et  $\hat{\mathcal{I}}^{dist}$  sont respectivement les moments quadripolaires exprimés dans  $(t, x, y, z)$  et  $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , on obtient :

$$\mathcal{I}_{ij}^{dist} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_{\hat{z}\hat{z}}^{dist} \begin{pmatrix} 3 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi(t) - 1 & -3/2 \sin^2 \alpha \sin 2\varphi(t) & -3 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi(t) \\ -3/2 \sin^2 \alpha \sin 2\varphi(t) & 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi(t) - 1 & 3 \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi(t) \\ -3 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi(t) & 3 \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi(t) & 3 \cos^2 \alpha - 1 \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

Dans la formule (9.9) intervient la dérivée seconde de  $\mathcal{I}_{ij}^{dist}$  c'est à dire:

$$\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{dist} = \frac{3}{2} \mathcal{I}_{\hat{z}\hat{z}}^{dist} \Omega^2 \sin \alpha \begin{pmatrix} 2 \sin \alpha \cos 2\varphi(t) & 2 \sin \alpha \sin 2\varphi(t) & \cos \alpha \sin \varphi(t) \\ 2 \sin \alpha \sin 2\varphi(t) & -2 \sin \alpha \cos 2\varphi(t) & -\cos \alpha \cos \varphi(t) \\ \cos \alpha \sin \varphi(t) & -\cos \alpha \cos \varphi(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (9.24)$$

Maintenant, il nous reste à calculer la projection transverse et sans trace de  $\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{dist}$ . On note  $i$  l'inclinaison de la ligne de visée. Sans perdre en généralité, on peut choisir  $(t, x, y, z)$  tel que la direction  $\vec{n}$  entre l'étoile et l'observateur soit dans le plan (x,y) (figure 9.1). Le projecteur transverse à la ligne de visée  $P_{ij}$  s'écrit alors dans  $(t, x, y, z)$  :

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 i & -\sin i \cos i \\ 0 & -\sin i \cos i & \sin^2 i \end{pmatrix} \quad (9.25)$$

A partir des équations (9.24) et (9.25) et après quelques calculs fastidieux on obtient une expression de la forme :

$$h_{ij}^{TT} = h_+ e_{ij}^+ + h_\times e_{ij}^\times \quad (9.26)$$

avec

$$e_{ij}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos^2 i & \sin i \cos i \\ 0 & \sin i \cos i & -\sin^2 i \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

$$e_{ij}^\times = \begin{pmatrix} 0 & \cos i & -\sin i \\ \cos i & 0 & 0 \\ -\sin i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.28)$$

et

$$\begin{cases} h_+ = h_0 \sin \alpha \left[ \frac{1}{2} \cos \alpha \sin i \cos i \cos \Omega(t - t_0) - \sin \alpha \frac{1 + \cos^2 i}{2} \cos 2\Omega(t - t_0) \right] \\ h_\times = h_0 \sin \alpha \left[ \frac{1}{2} \cos \alpha \sin i \sin \Omega(t - t_0) - \sin \alpha \cos i \sin 2\Omega(t - t_0) \right] \end{cases} \quad (9.29)$$

où

$$h_0 = -\frac{6G}{rc^4} \mathcal{I}_{zz}^{dist} \Omega^2 \quad (9.30)$$

Dans cette définition, nous avons remplacé  $\varphi(t)$  par son expression (9.20) et le terme de retard  $\frac{t}{c}$  est inclus dans  $t_0$ .

La déformation de l'étoile est en général décrite par la quantité sans dimension appelée ellipticité. Dans le cas des faibles déformations que nous avons considérées, elle s'écrit :

$$\varepsilon = -\frac{3}{2} \frac{\mathcal{I}_{zz}^{dist}}{I} \quad (9.31)$$

où  $I$  est le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation. En remplaçant cette expression dans (9.30), on obtient :

$$h_0 = \frac{4G}{rc^4} \varepsilon I \Omega^2 \quad (9.32)$$

Le résultat (9.29) appelle plusieurs commentaires :

- si l'étoile est symétrique dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation,  $\varepsilon = 0$  et il n'y a pas d'émission gravitationnelle. En revanche, plus la déformation est importante, plus l'amplitude de l'onde est élevée.
- la fréquence des ondes gravitationnelles émises est une et/ou deux fois la fréquence de rotation de l'étoile. Le premier mode domine lorsque l'inclinaison entre les axes de symétrie et de rotation est faible alors que le second augmente avec l'inclinaison des axes. Ce phénomène se produit par exemple (Ferrari et Ruffini, 1969 [36]) quand l'étoile se refroidit et que la croûte devient solide. L'axe de symétrie peut être "gelé" dans sa position initiale c'est à dire une position inclinée par rapport à l'axe de rotation.

Dans le cas d'une étoile triaxiale en rotation autour de son axe principal d'inertie,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et les ondes gravitationnelles ne sont plus émises qu'à deux

fois la fréquence de rotation.

$$\begin{cases} h_+ = \frac{2G}{c^4 r} \varepsilon I (1 + \cos^2 i) \Omega^2 \cos 2\Omega t \\ h_\times = \frac{-4G}{c^4 r} \varepsilon I \cos i \Omega^2 \sin 2\Omega t \end{cases} \quad (9.33)$$

Notons que :

- si l'axe de visée est perpendiculaire à l'axe de rotation,  $h_+$  reste la seule composante
- au contraire si l'axe de visée et l'axe de rotation sont alignés,  $h_+$  et  $h_\times$  ont la même amplitude

En utilisant la formule (9.14) on obtient que le taux d'énergie perdu par émission d'ondes gravitationnelles est proportionnel à la vitesse angulaire à la puissance six et au carré de l'ellipticité. On a la relation :

$$\frac{dE_{gw}}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \Omega^6 \varepsilon^2 I^2 \quad (9.34)$$

ou en fonction de la période :

$$\frac{dE_{gw}}{dt} = -\frac{2048\pi^6}{5} \frac{G}{c^5} \frac{1}{P^6} \varepsilon^2 I^2 \quad (9.35)$$

En prenant la valeur typique  $I = 1.4 \times 10^{45}$ , on obtient numériquement

$$\frac{dE_{gw}}{dt} = -2.1 \times 10^{24} \left( \frac{\varepsilon}{10^{-6}} \right)^2 \frac{1}{P^6} \quad (9.36)$$

La déformation de l'étoile dépendant de mécanismes physiques encore mal maîtrisés, la valeur de  $\varepsilon$  est très incertaine. Une limite supérieure peut être obtenue en considérant que la perte d'énergie des pulsars est due uniquement à l'émission gravitationnelle. Dans ce cas, on a :

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = \frac{dE_{gw}}{dt} \quad (9.37)$$

où le taux d'énergie de rotation se déduit de (4.3) :

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = I \Omega \dot{\Omega} \quad (9.38)$$



En remplaçant (9.34) et (9.38) dans (9.37), on obtient :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{-32}{5} \frac{G}{c^5} \varepsilon^2 I \Omega^5 \quad (9.39)$$

et on en déduit

$$\varepsilon = \left( \frac{-5c^5}{32G} \frac{\dot{\Omega}}{I\Omega^5} \right)^{1/2} \quad (9.40)$$

ou en fonction de la période :

$$\varepsilon = \left( \frac{5c^5}{512\pi^4 G I} \dot{P} P^3 \right)^{1/2} \quad (9.41)$$

Pour les objets de notre catalogue on obtient  $\varepsilon < (10^{-3} - 10^{-4})$ , mais le freinage des pulsars étant vraisemblablement essentiellement dipolaire magnétique cette valeur est très surestimée. Notons que pour les pulsars millisecondes, l'ellipticité est beaucoup plus faible  $\varepsilon < (10^{-8} - 10^{-9})$ . Récemment, Palomba (2000) [93] a reconsidéré le problème de l'ellipticité en tenant compte cette fois du freinage magnétique et a obtenu  $\varepsilon < (10^{-4} - 10^{-5})$  pour les quatre pulsars dont on connaît la dérivée seconde (tableau 4.1). D'autre part, Thorne (1987) [118] a montré que  $\varepsilon = 10^{-5}$  représente la contrainte maximale que la croûte de l'étoile neutrons peut supporter et l'on adopte en général la valeur canonique  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Il est intéressant de comparer le résultat (9.34) au taux d'énergie dissipée par le dipôle magnétique (4.1). Celui-ci ne dépendant que de la vitesse angulaire à la puissance quatre, son importance par rapport au taux d'énergie gravitationnelle augmente au fur et à mesure que l'étoile ralentit. En remplaçant  $B$  par son expression (3.10) dans (4.2), on réécrit (4.1) en fonction de la période et de sa dérivée :

$$\frac{dE_{rad}}{dt} = -4\pi^2 I \frac{\dot{P}}{P^3} \quad (9.42)$$

soit numériquement :

$$\frac{dE_{rad}}{dt} = -5.5 \times 10^{46} \frac{\dot{P}}{P^3} \quad (9.43)$$

Le rapport des deux taux s'écrit alors :

$$R = \frac{\dot{E}_{gw}}{\dot{E}_{rad}} = 3.8 \times 10^{-23} \left( \frac{\varepsilon}{10^{-6}} \right)^2 \frac{1}{\dot{P} P^3} \quad (9.44)$$

Le taux gravitationnel est comparable au taux dipolaire pour des ellipticités de l'ordre de  $\varepsilon = 1.7 \times 10^{-3}$  en moyenne pour les pulsars observés et de l'ordre de  $10^{-4} - 10^{-3}$  pour les pulsars les plus rapides (tableau 9.1).

pulsar	$P$ (ms)	$\dot{P}$	$R_{\epsilon=10^{-6}}$	$\epsilon_{R=1}$
de 1987A	2.14	$2 \times 10^{-10}$	$1.9 \times 10^{-5}$	$2.3 \times 10^{-4}$
Crabe	33.4	$3.98 \times 10^{-13}$	$2.6 \times 10^{-6}$	$6.2 \times 10^{-4}$
Vela	89.3	$1.24 \times 10^{-13}$	$4.3 \times 10^{-7}$	$1.5 \times 10^{-3}$

TAB. 9.1: comparaison entre les taux d'énergie radiative et gravitationnelle pour les pulsars normaux les plus rapides



# Chapitre 10

## Détecteurs d'Ondes Gravitationnelles

Les projets actuels de détection d'ondes gravitationnelles reposent sur la mesure du déplacement relatif entre deux masses libres. Les détecteurs se répartissent en deux classes : les antennes résonantes (barres et sphères) et les antennes interférométriques.

### 10.1 Effet des Ondes Gravitationnelles

Le passage d'une onde gravitationnelle modifie la structure de l'espace-temps. Cet effet est matérialisé par la variation de la distance entre deux corps d'épreuves en chute libre.

Pour chacun des deux modes de polarisation, la figure (10.1) montre les variations des distances à l'origine (où se situe une particule test) d'un anneau de particules tests parallèle au plan d'onde. L'anneau initialement circulaire prend sous l'effet de l'onde gravitationnelle une forme elliptique. Il est important de noter que la contraction d'une direction s'accompagne de l'élongation de sa direction perpendiculaire ; cette propriété est à la base des détecteurs interférométriques.

### 10.2 Antennes Résonantes

L'antenne gravitationnelle de Weber (1961) appelée aussi barre est constituée d'un lourd cylindre d'aluminium d'environ 1.5 tonne, suspendu par un câble et dont les modes d'oscillation peuvent être excités par le passage d'une onde gravitationnelle (le mode fondamental est celui d'un oscillateur harmonique). Les oscillations éventuelles sont mesurées à l'aide d'un transducteur,

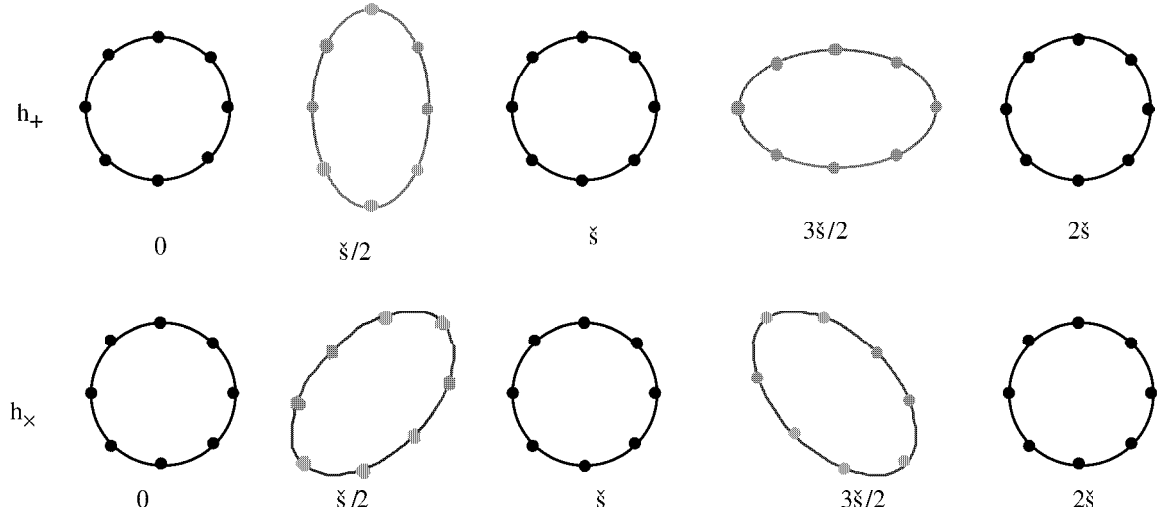


FIG. 10.1: variation des distances à l'origine (où se situe une particule test) d'un anneau de particules tests parallèle au plan d'onde

c'est à dire un système permettant de convertir des déformations mécaniques en signaux électriques. Afin de réduire le bruit thermique (qui est la principale source de bruit des détecteurs oscillants), le système est isolé dans une enceinte refroidie à très basse température (en pratique à la température de l'hélium liquide soit 4°K). Actuellement, les barres atteignent une sensibilité d'environ  $10^{-19}$  Hz dans une bande de fréquence très étroite (quelques Hz) autour des fréquences de résonance de l'ordre du kHz. La sensibilité d'un détecteur est caractérisée par la quantité  $h_n(f) = \sqrt{S_n(f)}$  où  $S_n(f)$  est la densité spectrale équivalente du bruit en  $\text{Hz}^{-1/2}$ . La courbe de sensibilité d'une barre se reconnaît aux "dépressions" très marquées aux fréquences de résonance et à son étroite largeur de bande. L'IGEC ( International Gravitational Event Collaboration) regroupe actuellement cinq barres : ALLEGRO (Bâton Rouge, Louisiana State University), AURIGA (Padoue, INFN), EXPLORER (Genève, CERN-INFN), NAUTILUS (Rome, INFN), NIOBE (Perth, University of Southern Australia). Le tableau (10.1) donne leurs principales caractéristiques (les fréquences de résonance  $f_-$  et  $f_+$ , la masse  $M$ , la longueur  $L$ , la température  $T$  et le facteur de qualité  $Q$ ).

Les barres sont des antennes "directionnelles". Les ondes gravitationnelles étant transverses, l'antenne ne réagit pas si l'onde se propage parallèlement à l'axe du cylindre (le maximum de réaction étant obtenu lorsque l'onde arrive perpendiculairement à l'axe). Une solution consiste à remplacer le cylindre (un mode fondamental) par une sphère (cinq modes fondamentaux)

d	ALLEGRO	AURIGA	EXPLORER	NAUTILUS	NIOBE
$f_- - f_+$ (Hz)	895-920	912-930	905-921	908-924	94-713
M (kg)	2296	2230	2270	2260	1500
L (m)	3	2.9	3	3	2.75
T (K)	4.2	0.25	2.6	0.1	5
Q ( $10^6$ )	2	3	1.5	0.5	20

TAB. 10.1: caractéristiques techniques des barres de l'IGEC

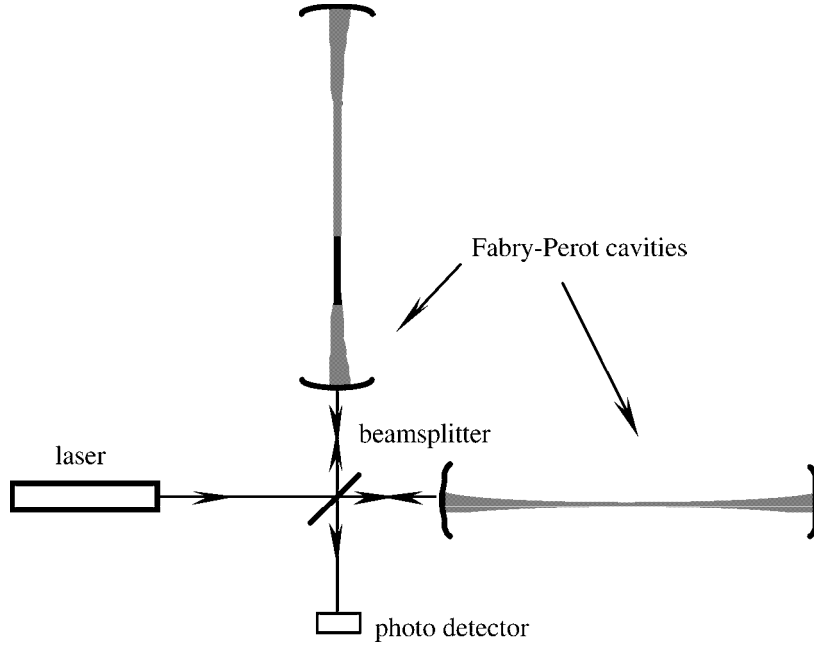


FIG. 10.2: interféromètre laser de type Michelson avec des cavités Fabry Perot

qui peut être excitée quelle que soit la direction de l'onde. En plus d'être “omnidirectionnel”, un tel détecteur permet de déterminer la direction et la polarisation de l'onde. Plusieurs projets sont actuellement à l'étude : GRAIL, SFERA (Rome) et GRAVITON (Brésil).

## 10.3 Antennes Interférométriques

### 10.3.1 Projet VIRGO

En 1971, Weiss et Moss, Miller et Forward, ont eu l'idée d'utiliser l'interférométrie laser comme méthode de détection d'ondes gravitationnelles. Le

projet franco-italien VIRGO actuellement en construction à Cascina près de Pise en Italie devrait être opérationnel en 2002. La figure (10.2) en illustre très schématiquement le principe. Le détecteur de base est un interféromètre de Michelson géant dont les bras de trois km sont dotés de cavités Fabry Perot (M1-M4 pour le bras 1 et M2-M3 pour le bras 2). Les couples de miroirs M1-M4 et M2-M3 sont suspendus et isolés des vibrations sismiques de façon à former des masses libres. Un miroir semi-réfléchissant S situé à l'intersection des deux bras réfléchit vers M1 et transmet vers M2 un faisceau laser monochromatique stabilisé. La recombinaison des faisceaux après plusieurs réflexions dans les cavités Fabry Perot donne lieu à des franges d'interférence décelées par le détecteur D. Lorsqu'une onde gravitationnelle traverse le système, l'un des bras se contracte alors que l'autre se dilate modifiant le chemin optique des faisceaux et déplaçant les franges. L'effet est extrêmement faible et pour obtenir un déplacement décelable la distance parcourue par chaque faisceau doit être très importante de l'ordre de  $\frac{\lambda}{2}$  soit 150 km pour une onde à la fréquence de 1 kHz. Grâce aux cavités Fabry Perot cette distance est atteinte pour des bras de 1.5 km.

Les bruits qui limitent la sensibilité de VIRGO sont principalement :

- le bruit de photons : il est dû à la puissance finie du laser. La lumière présente dans l'interféromètre est renvoyée vers le laser de façon à avoir des interférences destructives sur le détecteur. Une technique consiste à introduire un miroir de recyclage qui réinjecte la lumière, augmentant la puissance présente dans l'interféromètre.
- le bruit sismique : il est réduit par les suspensions anti-vibration des miroirs. Le bruit sismique limite la sensibilité aux basses fréquences. Dans le cas de l'interféromètre VIRGO, un système d'isolation très sophistiqué, le “superaténuateur” permet d'élargir la bande de sensibilité jusqu'à 5 Hz.
- le bruit thermique des suspensions : il reflète à l'échelle macroscopique les fluctuations browniennes de la position de leur centre de gravité.
- le bruit thermique des miroirs : la surface des miroirs présente une incertitude de position due au mouvement thermique de ses atomes. Il est atténué par le refroidissement des miroirs.
- le bruit de collision : il est dû aux atomes résiduels dans l'enceinte sous vide contenant miroir et faisceau

La figure (10.3) présente la courbe de sensibilité de VIRGO résultant de l'addition des différentes sources de bruit. Notons que les interféromètres laser sont sensibles dans une large bande de fréquence (typiquement entre 10Hz et 10 kHz), contrairement aux interféromètres résonants.

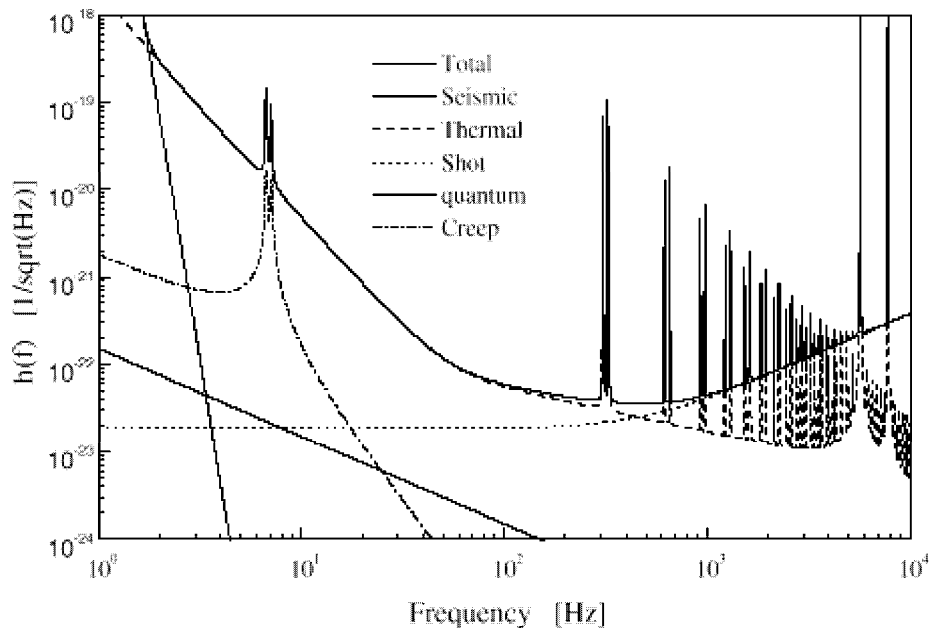


FIG. 10.3: courbe de sensibilité de VIRGO

### 10.3.2 Autres projets

Actuellement, plusieurs interféromètres terrestres sont en construction :

- le projet américain LIGO est constitué de deux interféromètres de bras de 4 km orientés de la même façon. L'un est à Hanford dans l'état de Washington et l'autre à Livingston en Louisiane. Disposer de plusieurs interféromètres est important pour détecter :
  - le fond de rayonnement stochastique (par corrélation entre les deux détecteurs)
  - les sources impulsionnelles (par coïncidence)

LIGO devrait commencer à recueillir des données en septembre 2001.

- le projet Germano-britannique GEO 600 situé à Hanovre a comme son nom l'indique des bras de 600 m.
- le projet japonais TAMA 300 situé à Mitaka est le seul interféromètre déjà opérationnel. Avec des bras de 300 m, il s'agit en fait d'un prototype destiné à mettre au point plusieurs techniques.



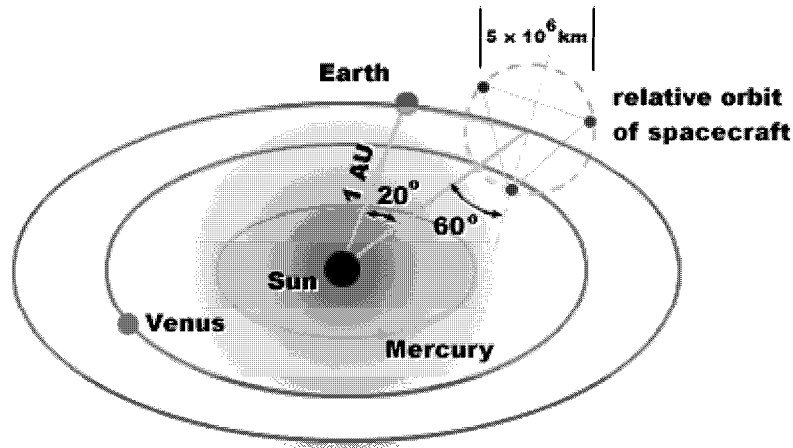


FIG. 10.4: projet spatial LISA

### 10.3.3 Projet spatial LISA

Le projet LISA est soutenu par la NASA et l'ESA. Il s'agit cette fois de s'affranchir de la gravité terrestre et du bruit sismique en construisant un interféromètre dans l'espace. LISA sera constitué de trois plateformes placées en triangle équilatéral et séparées par des bras de 5 millions de km. Le centre du triangle se situera dans le plan de l'écliptique à  $20^\circ$  de la Terre qu'il suivra sur son orbite autour du Soleil (figure 10.4). Le troisième bras servira à obtenir des informations complémentaires sur la polarisation et la direction du signal et permettra d'effectuer des corrélations pour la détection du fond stochastique. Un vol de démonstration technologique est prévu pour 2005 et le lancement pour 2011.

## 10.4 Sources

Les antennes interférométriques chercheront dans leur domaine de fréquence tout rayonnement gravitationnel de l'espace. Les interféromètres terrestres, limités par le bruit sismique, ne sont sensibles qu'au delà d'une dizaine de Herz alors que le projet spatial LISA pourra explorer des fréquences aussi basses que 0.1 mHz mais ne dépassera pas quelques centaines de mHz à cause de la longueur de ses bras. LISA et les interféromètres terrestres seront ainsi complémentaires et couvriront une large bande de fréquence entre  $10^{-4} - 10^4$  Hz (figure 10.5)

Les sources potentielles se répartissent en trois classes :

- les sources impulsionnelles ou “burst” : elles correspondent à des événements uniques de très courte durée. Il s’agit par exemple de l’explosion de supernovae ou de la fusion de systèmes binaires d’objets massifs et compacts (étoiles à neutrons ou trous noirs). Beaucoup de sources impulsionnelles se situent dans le domaine de fréquence des interféromètres terrestres, entre 0.1 – 10 kHz.
- les sources périodiques. Le signal émis par ce type de source est en général plus faible que pour les bursts mais cet effet peut être compensé par l’intégration du signal sur une longue période. A l’exception des étoiles à neutrons en rotation, la plupart des sources périodiques émettent à des fréquences très basses, de l’ordre du mHz et ne seront accessibles que par LISA. Il s’agit des systèmes binaires d’objets massifs avant qu’ils ne fusionnent, des paires de naines blanches, des modes normaux des trous noirs au moment de leur formation...
- le fond de rayonnement stochastique : il s’agit aussi bien des contributions de populations cosmologiques de différentes sources astrophysiques que du rayonnement gravitationnel produit aux premiers instants de l’Univers. Le rayonnement primordial devrait être accessible par LISA.

Enfin, et c’est le plus grisant sans doute, la détection des ondes gravitationnelles est aussi la promesse de découvrir des objets et phénomènes dont nous n’avons pas même la notion aujourd’hui .

## 10.5 Réponse d’un Détecteur Interférométrique

Intéressons nous maintenant à la réponse d’un détecteur interférométrique à une onde gravitationnelle. Dans le repère de l’onde, la perturbation spatiale de la métrique s’écrit (9.8) :

$$H_w(t) = \begin{pmatrix} h_+(t) & h_\times(t) & 0 \\ h_\times(t) & -h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

La réponse  $h(t)$  du détecteur est définie comme la différence entre les variations relatives de longueur des deux bras de l’interféromètre et s’écrit (Jaranowski et al., 1998 [57]) :

$$h(t) = \frac{1}{2} \vec{n}_1 \cdot [H_d(t) \vec{n}_1] - \frac{1}{2} \vec{n}_2 \cdot [H_d(t) \vec{n}_2] \quad (10.2)$$

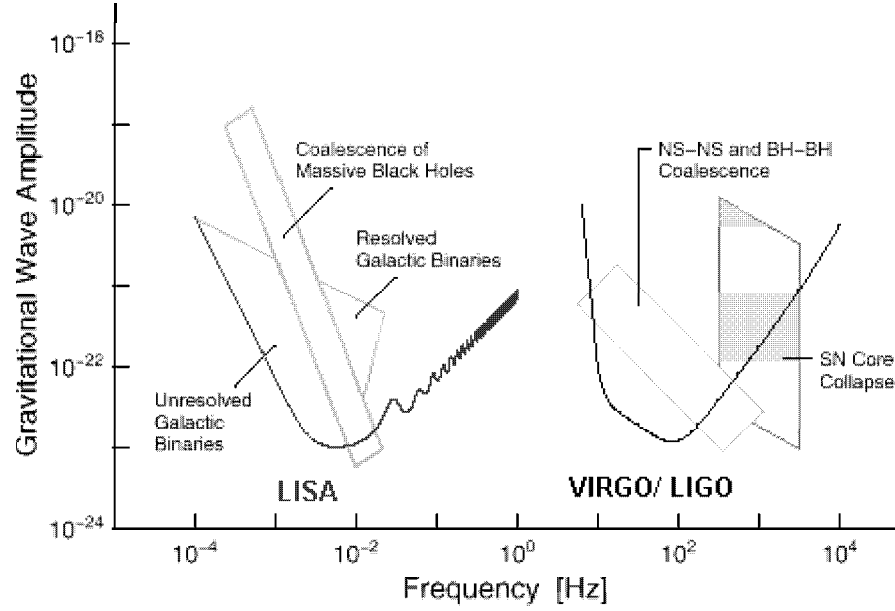


FIG. 10.5: sensibilité de LISA avec quelques sources périodiques et des interféromètres terrestres comme VIRGO avec quelques sources impulsionnelles.

où  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont respectivement les vecteurs directeurs des bras 1 et 2. Les bras sont numérotés de telle sorte que le produit vectoriel  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  pointe vers l'extérieur de la surface de la Terre.

$h(t)$  est une combinaison linéaire de  $h_+(t)$  et de  $h_\times(t)$  :

$$h(t) = F_+(t)h_+(t) + F_\times(t)h_\times(t) \quad (10.3)$$

où  $F_+(t)$  et  $F_\times(t)$  sont les réponses impulsionnelles du détecteur sur chaque composante de polarisation. Ce sont des fonctions périodiques du temps avec une période égale à un jour sidéral.

$H_d$  est la perturbation exprimée dans le référentiel du détecteur. Elle se déduit de  $H_w$  par le changement de repère suivant :

$$H_d(t) = M(t)H_w(t)M(t)^T \quad (10.4)$$

où  $M$  est la matrice de passage du repère cartésien de l'onde  $(x_w, y_w, z_w)$  au repère cartésien  $(x_d, y_d, z_d)$  du détecteur et  $M^T$  sa transposée. Dans le repère de l'onde, la perturbation se propage selon la direction  $+z_w$ .

Par la suite, on désigne par  $R_i(\epsilon)$  une rotation d'angle  $\epsilon$  autour de l'axe  $i$  où les indices 1, 2 et 3 font respectivement référence aux axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  :

$$- R_1(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix}$$

$$- R_2(\epsilon) = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & 0 & -\sin \epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \epsilon & 0 & \cos \epsilon \end{pmatrix}$$

$$- R_3(\epsilon) = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & \sin \epsilon & 0 \\ -\sin \epsilon & \cos \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M$  s'écrit comme le produit de six rotations :

$$M = R_3(\gamma + \zeta/2 + \frac{\pi}{2})R_2(\lambda)R_3(\phi_r(t))R_3(\alpha + \frac{\pi}{2})R_1(\delta + \frac{\pi}{2})R_3(\varphi) \quad (10.5)$$

La première étape est le passage aux coordonnées équatoriales (ascension droite  $\alpha$  et déclinaison  $\delta$ ). Elle s'effectue en trois temps :

- $R_3(\varphi)$  est la correction à la polarisation
- $R_1(\delta + \frac{\pi}{2})$  est la projection dans le plan de l'équateur
- $R_3(\alpha + \frac{\pi}{2})$  est la rotation dans le plan de l'équateur faisant coïncider l'axe des x avec la direction du point vernal.

La deuxième étape est le passage aux coordonnées horaires (angle horaire  $H$  et déclinaison  $\delta$ ).

- $R_3(\phi_r(t))$  est la rotation dans le plan de l'équateur d'un angle  $\phi_r(t) = H + \alpha$  qui n'est autre que le temps sidéral local du détecteur au temps  $t$  ou l'ascension droite du méridien. Il est lié au temps sidéral local du détecteur à 0h ( $\phi_r^\circ$ ) et à la vitesse angulaire de la Terre ( $\Omega_r$ ) par la relation  $\phi_r(t) = \phi_r^\circ + \Omega_r t$ .

La troisième étape est le passage aux coordonnées horizontales (azimuth  $A$  et hauteur  $h$ ).

- $R_2(h = \lambda)$  est le passage du plan de l'équateur à la latitude  $\lambda$  du détecteur.

La dernière étape est le passage au repère du détecteur (où l'axe des x coïncide avec le premier bras).

- $R_3(\gamma + \zeta/2 + \frac{\pi}{2})$  est la rotation d'angle  $(\gamma + \zeta/2 + \frac{\pi}{2})$  dans le plan du détecteur où  $\gamma$  est l'orientation de la bissectrice des deux bras par rapport à la direction Est locale et où  $\zeta$  est l'angle aigu entre les deux bras de l'interféromètre.

Pour VIRGO on a :

$$\gamma = 116.5^\circ, \quad \zeta = 90^\circ \text{ et } \lambda = 43.63^\circ \quad (10.6)$$

Dans le référentiel du détecteur, les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ont pour coordonnées :

$$\vec{n}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{n}_2 = (\cos \zeta, \sin \zeta, 0) \quad (10.7)$$

Les formules explicites donnant  $F_+$  et  $F_\times$  s'obtiennent en combinant (10.2) et (10.7). D'après Jaranowski et al. (1998) [57] :

$$\begin{cases} F_+(t) = \sin \zeta [a(t) \cos 2\psi + b(t) \sin 2\psi] \\ F_\times(t) = \sin \zeta [b(t) \cos 2\psi - a(t) \sin 2\psi] \end{cases} \quad (10.8)$$

où

$$\begin{aligned} a(t) = & \frac{1}{16} \sin 2\gamma (3 - \cos 2\lambda) (3 - \cos 2\delta) \cos[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)] \\ & - \frac{1}{4} \cos 2\gamma \sin \lambda (3 - \cos 2\delta) \sin[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)] \\ & + \frac{1}{4} \sin 2\gamma \sin 2\lambda \sin 2\delta \cos[\alpha - \phi_r - \Omega_r t] \\ & - \frac{1}{2} \cos 2\gamma \cos \lambda \sin 2\delta \sin[\alpha - \phi_r - \Omega_r t] \\ & + \frac{3}{4} \sin 2\gamma \cos^2 \lambda \cos^2 \delta \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} b(t) = & \cos 2\gamma \sin \lambda \sin \delta \cos[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)] \\ & + \frac{1}{4} \sin 2\gamma (3 - \cos 2\lambda) \sin \delta \sin[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)] \\ & + \cos 2\gamma \cos \lambda \cos \delta \cos[\alpha - \phi_r - \Omega_r t] \\ & + \frac{1}{2} \sin 2\gamma \sin 2\lambda \cos \delta \sin[\alpha - \phi_r - \Omega_r t]. \end{aligned} \quad (10.10)$$

# Chapitre 11

## Contribution des Pulsars au Rayonnement Gravitationnel

Intéressons nous maintenant à la détection par VIRGO du rayonnement gravitationnel des pulsars normaux de la Galaxie (Regimbau et de Freitas Pacheco, 2000 [98]). Nous négligeons dans cette étude tout effet de précession. Pour un pulsar donné, la réponse du détecteur est alors obtenue en remplaçant les composantes de polarisation  $h_+$  et  $h_\times$  d'une étoile à neutrons triaxiale en rotation (9.33) dans l'expression (10.3). On obtient :

$$h(t) = \frac{2G}{c^4 r} \varepsilon I \Omega^2 [(1 + \cos^2 i) \cos(2\Omega t) F_+(t) - 2 \cos i \sin(2\Omega t) F_\times(t)] \quad (11.1)$$

Les pulsars étant des sources périodiques, on peut envisager deux méthodes différentes de détection :

- la détection individuelle dans un espace à quatre paramètres (fréquence, position dans le ciel, phase)
- la détection du fond de rayonnement gravitationnel émis par l'ensemble des pulsars qui donne lieu à une recherche quadratique.

Dans les deux cas, il faut tenir compte du domaine de sensibilité de VIRGO. La limite inférieure de 5 Hz impose de ne considérer que les pulsars avec une période inférieure à 0.4 s. La limite supérieure de 5 kHz, par contre, est au dessus de la fréquence maximale des pulsars estimée à 4 kHz (voir paragraphe 5.1). D'après nos simulations, 5200 objets sont potentiellement détectables avec  $P < 0.4$  s et dans ce cas, la détection individuelle serait la plus avantageuse (Giazotto, Bonazzola et Gourgoulhon, 1997 [42]).

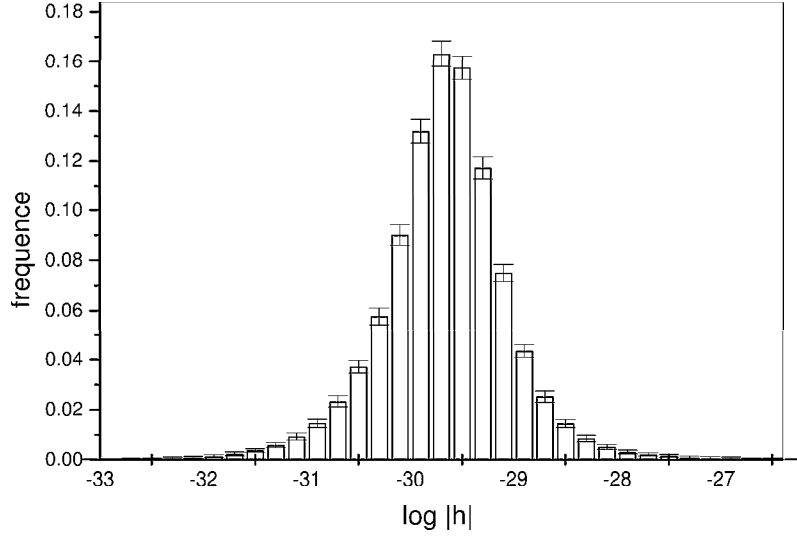


FIG. 11.1: distribution de l'amplitude gravitationnelle  $h$  pour une ellipticité de  $10^{-6}$ . Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion calculée à partir de 500 expériences numériques

## 11.1 Recherche Individuelle

Nous reprenons nos simulations numériques de la population réelle pour calculer la contribution  $h_i(t)$  de chaque pulsar satisfaisant à la condition  $P < 0.4$  s. Nous connaissons déjà la distance à la Terre  $r$ , la période  $P$  (par conséquent  $\Omega$ ) et les coordonnées galactiques  $(l, b)$  de chaque objet. Nous déterminons en plus par des tirages au sort uniformes les angles d'inclinaison  $i$  et de polarisation  $\psi$ . Les coordonnées équatoriales  $\alpha$  et  $\delta$  se déduisent des coordonnées galactiques  $l$  et  $b$  (voir par exemple Duffett-Smith, 1979 [33]). L'instant du jour sidéral  $t$  où a lieu la détection est déterminé par un tirage au sort uniforme de l'orientation du détecteur par rapport au système de coordonnées équatoriales. Notons que  $t$  peut être différent pour chaque pulsar.

L'ellipticité  $\varepsilon$  ne pouvant pas être évaluée de façon indépendante pour chaque pulsar elle est maintenue fixe pour une simulation donnée ; c'est une valeur moyenne que nous considérons comme un nouveau paramètre du modèle.

La figure (11.1) représente la distribution en fréquence de l'amplitude  $h$  (en échelle logarithmique) pour une ellipticité de  $10^{-6}$ . La courbe correspon-

$\varepsilon$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
VIRGO	15	3	0
LIGO I	12	2	0
LIGO II	90	12	2

TAB. 11.1: nombre d'objets détectables pour différentes valeurs de l'ellipticité

quant à une ellipticité  $\varepsilon$  se déduit de celle-ci par une simple translation de  $\log \varepsilon + 6$ . La densité de probabilité peut être approchée par une distribution de Laplace de dispersion  $\sigma = 0.5$  et centrée en  $-23.7 + \log \varepsilon$  :

$$l(x) = e^{-2|x - (-23.7 + \log \varepsilon)|} \quad (11.2)$$

où  $x = \log |h|$ .

Intéressons-nous maintenant à la population détectable par VIRGO. Un pulsar de fréquence gravitationnelle  $f_g$  peut être détecté si son amplitude est au dessus de la courbe de sensibilité. Pour un rapport signal à bruit,  $S/N = 2$ , le critère de détectabilité s'écrit :

$$h(f_g) \geq 2 \frac{h_n(f_g)}{\sqrt{T}} \quad (11.3)$$

où  $T$  est le temps d'intégration que nous prenons égal à un an et où  $h_n(f_g)$  exprimée en  $\text{Hz}^{-1/2}$  est calculée à partir d'un ajustement de la courbe de sensibilité de VIRGO :

$$h_n^{Virgo}(f) = 10^{-16.40 - 5.18x + 1.33x^2 - 0.086x^3} \quad (11.4)$$

où  $x = \log_{10}(f)$

Il est important de mentionner que le résultat de (11.3) dépend de la valeur que l'on adopte pour l'ellipticité moyenne : plus  $\varepsilon$  est faible, plus  $h$  est petit et plus le critère de détectabilité est difficile à satisfaire.

Les simulations effectuées pour différentes valeurs du paramètre  $\varepsilon$  révèlent un résultat intéressant : une ellipticité moyenne de  $10^{-6}$  représente le seuil de détectabilité pour la sensibilité actuelle de VIRGO. Pour cette valeur, la population détectable est de 2 – 3 objets alors que nos simulations prédisent environ 15 détections si  $\varepsilon = 10^{-5}$  et aucune détection pour  $\varepsilon < 10^{-6}$ . En cas de non détection, on pourra fixer une limite supérieure à l'ellipticité.

Le nombre de détections selon la valeur de l'ellipticité est reporté dans le tableau (11.1). A titre de comparaison, nous avons effectué les calculs pour LIGO I et LIGO II. La sensibilité de LIGO I est comparable à celle de VIRGO mais celle de LIGO II est supérieure d'environ un ordre de grandeur.



Notons que d'après la condition (11.3), améliorer la sensibilité (diminuer  $h_n$ ) ou augmenter l'ellipticité  $\varepsilon$  agissent dans le même sens. Par conséquent, les populations VIRGO/LIGO I avec  $\varepsilon = 10^{-5}$  et LIGO II avec  $\varepsilon = 10^{-6}$  sont les mêmes ainsi que les populations VIRGO/LIGO I avec  $\varepsilon = 10^{-6}$  et LIGO II avec  $\varepsilon = 10^{-7}$ .

### 11.1.1 Etude statistique de la population détectable par VIRGO

Les objets détectables sont rares et les temps de calculs nécessaires à traiter les données seront considérables ; pour une recherche optimale sur un an, la puissance de calcul est estimée à  $3.6 \times 10^{19}$  Tflops (Frasca, communication privée). De façon à optimiser les recherches, il peut être intéressant de rechercher la région de l'espace des paramètres où une détection est la plus probable. Pour la définir, nous avons étudié certaines propriétés statistiques de la population détectable par VIRGO comme la fréquence gravitationnelle, la latitude ou la longitude.

Avant d'aller plus loin, il est important de souligner qu'a priori les distributions spatiales (latitude et longitude) et celle de la fréquence de la population détectable sont liées au paramètre  $\varepsilon$ . En effet, l'amplitude  $h$  (11.1) dépend de la fréquence et de la distance mais aussi de l'ellipticité. Par conséquent, plus  $\varepsilon$  est faible et plus les fréquences et les distances qui vérifient la condition de détectabilité (11.3) sont respectivement élevées et faibles. En fait, la distribution de la distance de la population détectable est pratiquement la même que celle de la population totale ce qui signifie que la détectabilité d'un pulsar dépend essentiellement de sa vitesse de rotation. Par conséquent, la distribution de la fréquence est fortement dépendante du paramètre  $\varepsilon$  alors que nous ne notons aucun changement des distributions spatiales pour des valeurs de  $\varepsilon$  entre  $10^{-4}$  et  $10^{-6}$ .

#### distribution de la fréquence

Etudions d'abord la distribution de la fréquence. La figure (11.2) représente la distribution des quelques objets détectables par VIRGO dont le nombre en fonction de l'ellipticité est donné dans le tableau (11.1). Rappelons que parmi la population avec  $P < 0.4$  s, il s'agit des pulsars au dessus du seuil de détectabilité de l'antenne (condition 11.3). Pour le moment, ne disposant pas d'estimations précises de l'ellipticité, nous nous intéressons à la fréquence la plus probable pour un  $\varepsilon$  donné. A court terme, nous envisageons de déterminer explicitement l'évolution du maximum de la distribution en fonction de l'ellipticité. Pour  $\varepsilon = 10^{-6}$ , la fréquence la plus probable est

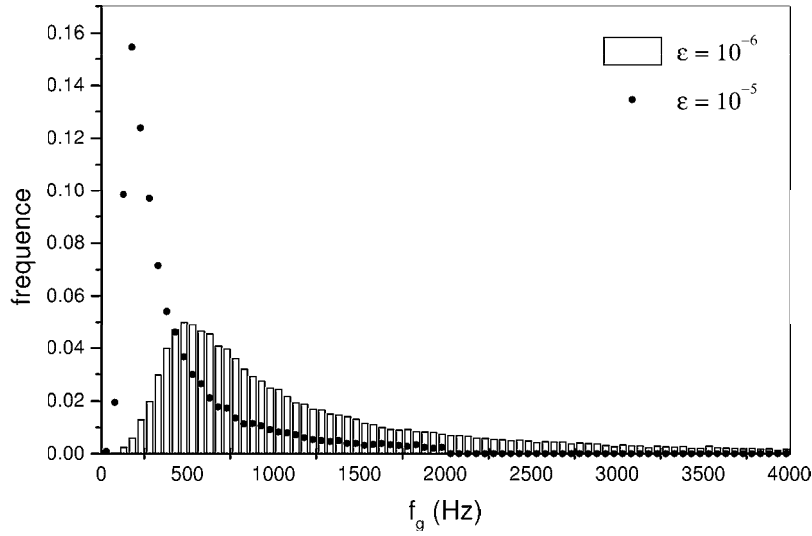


FIG. 11.2: distributions de la fréquence gravitationnelle de la population détectable par VIRGO pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  (points, 15 objets) et  $10^{-6}$  (colonnes, 3 objets)

autour de 480 Hz et elle diminue jusqu'à 180 Hz pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  (cas où la condition (11.3) est moins difficile à réaliser). Comme nous l'avons déjà mentionné, la sensibilité agit dans le même sens : si elle augmente, la fréquence la plus probable diminue. Dans le cas idéal où nous ne serions limités par aucun bruit, nous retrouverions la distribution de la population "potentiellement détectable", concentrée aux faibles fréquences (99% avec  $f_g < 50$  Hz). Pour compléter l'étude de la fréquence, nous avons établi la distribution de sa dérivée première (ou de façon équivalente, la distribution de la dérivée première de la période, figure 11.3). Nous obtenons que les pulsars détectables ont des taux de ralentissement très faibles par rapport à la population totale. Ce résultat peut sembler surprenant au premier abord mais l'explication est assez simple. Les objets les moins freinés gardent plus longtemps une vitesse de rotation élevée, ce qui augmente leur probabilité d'être détectés.

### distributions spatiales

Intéressons nous maintenant à la distribution des pulsars détectables dans le ciel. Il convient de rappeler que ce résultat ne dépend pas de façon notable du paramètre  $\varepsilon$ .

Nos simulations confirment que la population des pulsars détectables est

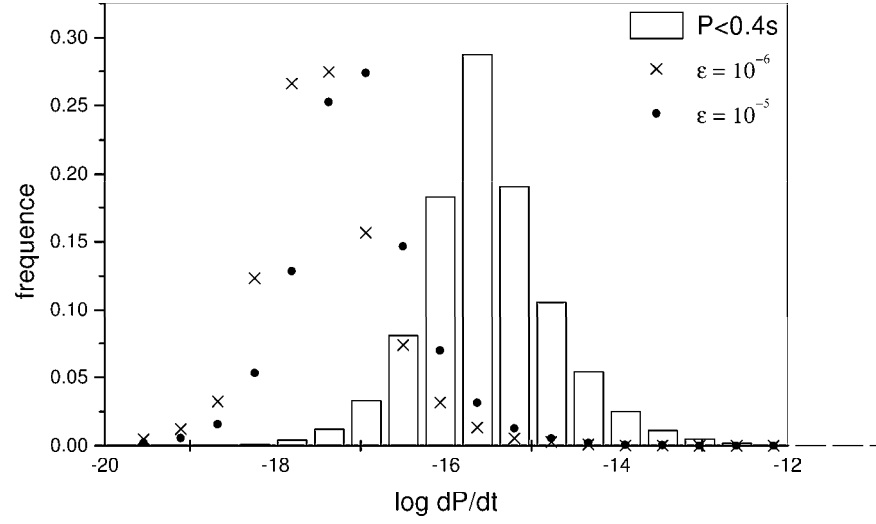


FIG. 11.3: distributions de la dérivée de la période de la population détectable par VIRGO pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  (points, 15 objets) et  $10^{-6}$  (croix, 3 objets), comparées à la distribution de la population potentiellement détectable ( $P < 0.4s$ ) (colonnes)

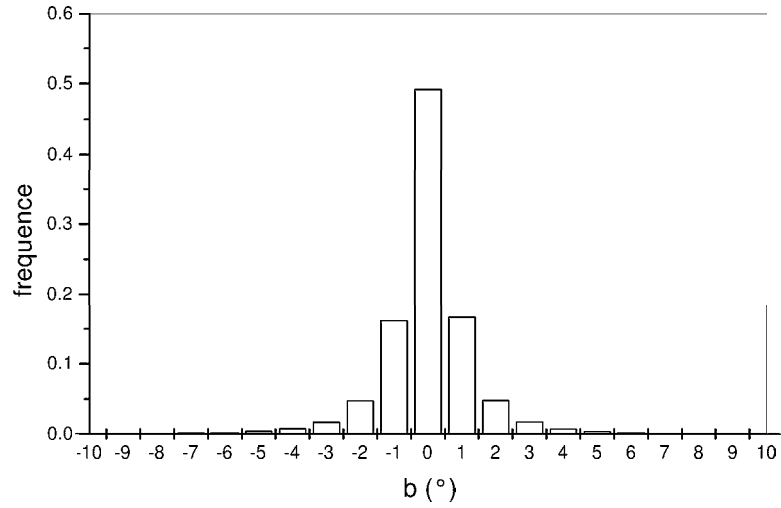


FIG. 11.4: distribution de la latitude de la population détectable par VIRGO

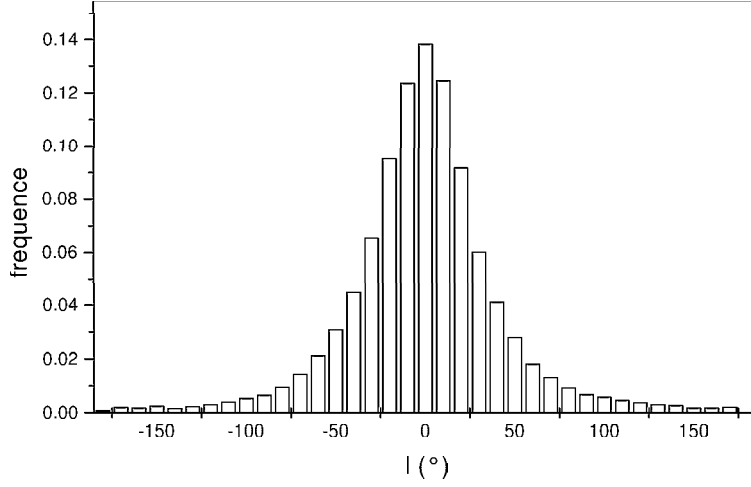


FIG. 11.5: distribution de la longitude de la population détectable par VIRGO

fortement concentrée dans le plan de la Galaxie (figure 11.4). On retrouve 90% des pulsars entre les latitudes  $[-1.5^\circ, 1.5^\circ]$ .

Pour des calculs quantitatifs, on peut représenter la fonction de probabilité de la latitude par une distribution de Laplace centrée en zéro et de dispersion  $\sigma = 1.24$

$$f_b(b) = \frac{1}{2.48} e^{-\frac{|b|}{1.24}} \quad (11.5)$$

La figure (11.5) représente la distribution de la longitude. Elle atteint un maximum autour de  $l = 0^\circ$ . Ce résultat était prévisible. Il est raisonnable d'obtenir que le centre de la Galaxie où sont concentrées les étoiles massives qui donnent naissance aux pulsars soit la région la plus favorable pour une détection.

Pour des calculs quantitatifs, on peut représenter la fonction de probabilité de la longitude par une distribution de Laplace centrée en zéro et de dispersion  $\sigma = 46.7$

$$f_l(l) = \frac{1}{93.4} e^{-\frac{|l|}{46.7}} \quad (11.6)$$

### conséquences pour VIRGO

La recherche optimale des pulsars est basée sur l'évaluation de FFT (Fast Fourier Transform) extrêmement longues et les temps de calculs nécessaires

Paramètres	intervalle à 90%
b (°)	[-1.5 ; 1.5]
l (°)	[-65 ; 65]
f <sub>g</sub> (Hz) (ε = 10 <sup>-6</sup> )	[5 ; 1205]
f <sub>g</sub> (Hz) (ε = 10 <sup>-5</sup> )	[5 ; 2505]

TAB. 11.2: espace des paramètres optimal

au balayage complet de l'espace des paramètres sont au delà de toute valeur raisonnable. Une solution sont les méthodes dites "hiérarchiques" (Frasca, 2000) qui permettent de réduire de façon très significative les temps de calculs (de plus de dix ordres de magnitude) moyennant une faible perte de sensibilité (de moins d'un ordre de magnitude). Une détection pouvant avoir lieu n'importe où, ces techniques seront très utiles dans le cadre d'une recherche aveugle complète.

Nos simulations montrent que l'on peut garder 90% de la probabilité maximale de détection en explorant moins de 1% de l'espace des paramètres (tableau 11.2). Malheureusement, ce n'est pas suffisant pour mener une recherche aveugle au maximum de la sensibilité. Les méthodes hiérarchiques restent donc nécessaires mais on pourrait envisager de les optimiser pour les paramètres les plus probables.

## 11.2 Recherche Quadratique

Considérons maintenant la détection du fond de rayonnement gravitationnel émis par l'ensemble de la population. La stratégie proposée par Giazotto, Bonazzola et Gourgoulhon (1997) [42] (par la suite GBG97) consiste à rechercher la modulation du signal due à l'anisotropie de la distribution des pulsars dans la Galaxie et à la directivité du détecteur. Le signal mesuré est la somme des amplitudes quadratiques moyennes individuelles des pulsars satisfaisant à la condition  $P < 0.4$  s :

$$H(t) = \sum_{P < 0.4s} \langle h_i^2(t) \rangle \quad (11.7)$$

Notons que dans l'expression (11.7), l'instant d'observation  $t$  est le même pour chaque pulsar. Les recherches s'effectuant avec un seul détecteur, on remplace la moyenne  $\langle \rangle$  sur plusieurs détecteurs par une moyenne sur un temps supérieur à la période de rotation mais inférieur au temps de modu-

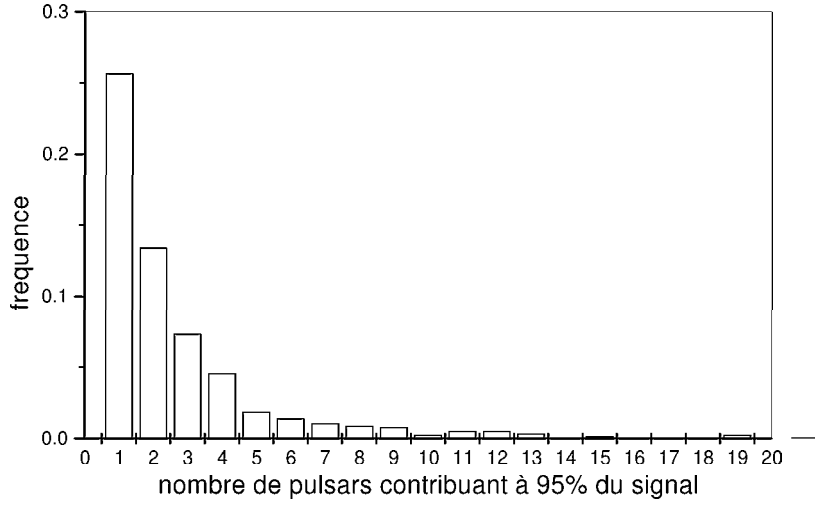


FIG. 11.6: distribution du nombre de pulsars dominant le signal quadratique total

lation sidérale ( $0.4 \text{ s} < \tau < 1 \text{ j}$ ). On obtient

$$\langle h^2(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau h^2(t) dt \quad (11.8)$$

$$\langle h^2(t) \rangle = \frac{G^2}{c^8 r^2} I^2 \varepsilon^2 \Omega^4 [2(1 + \cos^2 i)^2 F_+^2(t) + 8 \cos^2 i F_\times^2(t)] \quad (11.9)$$

Dans cette expression, la moyenne sur  $\tau$  permet d'éliminer les termes croisés.

Il faut noter que GBG97 [42] ont estimé ce signal de façon analytique, sans disposer de simulations de la population des pulsars. La méthode consiste à multiplier un  $\langle h^2 \rangle$  typique par le nombre d'objets satisfaisant aux conditions de détectabilité de l'antenne. Les simulations permettent une estimation plus réaliste dans la mesure où  $\langle h^2(t) \rangle$  est calculé de façon indépendante pour chaque pulsar. En fait, comme l'avaient soupçonné de Freitas Pacheco et Horvath (1997) [28], seuls les pulsars les plus rapides et les plus proches contribuent au signal. La figure (11.6) montre la distribution en fréquence du nombre de pulsars qui contribuent à 95% de l'amplitude quadratique. Elle met en relief un résultat important : le rayonnement est en général complètement dominé par 1, 2 voir 3 pulsars. Il est donc essentiel de connaître les distributions de la période (figure 11.7) et de la distance (figure 11.8), données par les simulations, pour calculer leur contribution individuelle. En revanche, le nombre d'objets, qui est la clef de voute des méthodes analytiques n'intervient pas.

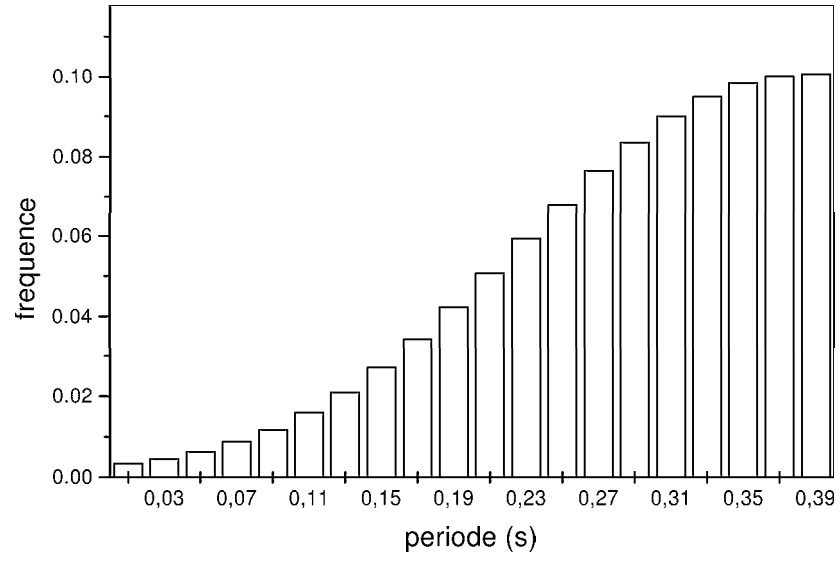


FIG. 11.7: distribution de la période de la population avec  $P < 0.4s$

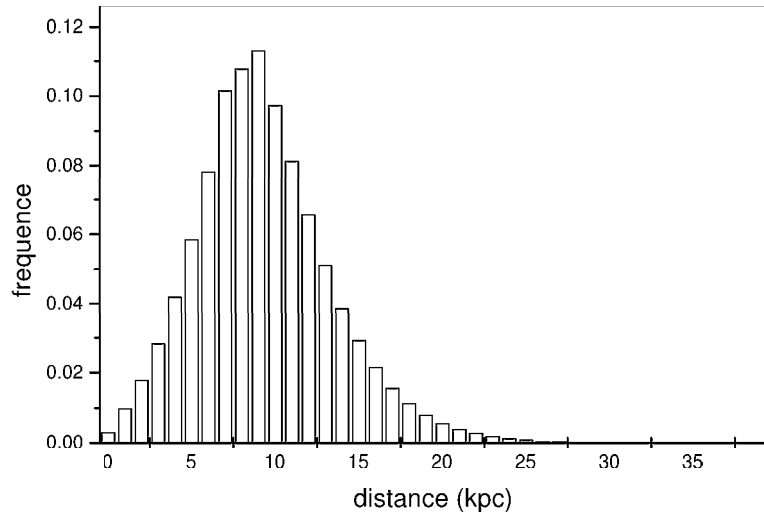


FIG. 11.8: distribution de la distance de la population avec  $P < 0.4s$

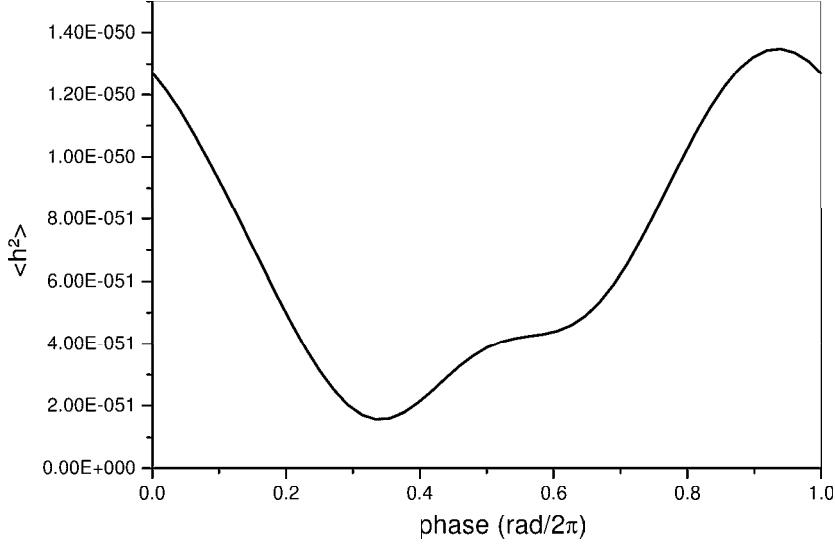


FIG. 11.9: modulation de l'amplitude quadratique d'un pulsar de période  $P=1\text{ms}$  et situé à  $d=10\text{ kpc}$

Il faut noter que les objets les plus rapides sont aussi probablement les plus déformés. Selon le scénario d'évolution de Link et al. (1998) [69] que nous avons adopté dans nos simulations, l'étoile en ralentissant, devient plus sphérique et le réajustement de sa structure conduit à des tremblements d'étoile. Si nous avons pu calculer de façon indépendante l'ellipticité de chaque pulsar, nous aurions obtenu a fortiori que les pulsars rapides dominaient complètement le rayonnement total.

Une autre conséquence de ce résultat est qu'il n'existe pas de "signal typique" et la courbe de modulation varie beaucoup d'une simulation à l'autre. Elle dépend de la position des pulsars les plus rapides par rapport à l'antenne. Les figures (11.9), (11.10) et (11.11) représentent l'évolution au cours d'une journée sidérale de l'amplitude quadratique de trois pulsars susceptibles de dominer le signal total.

De façon à estimer la détectabilité de l'ensemble de la population par l'antenne VIRGO, on a établi la distribution en fréquence de l'amplitude quadratique maximale  $H_{\text{max}}$  (en échelle logarithmique) pour 7000 simulations. La figure (11.12) la représente pour une ellipticité de  $10^{-6}$ . La distribution correspondant à une ellipticité  $\varepsilon$  se déduit de celle-ci par une simple translation de  $2 \log \varepsilon + 12$ .



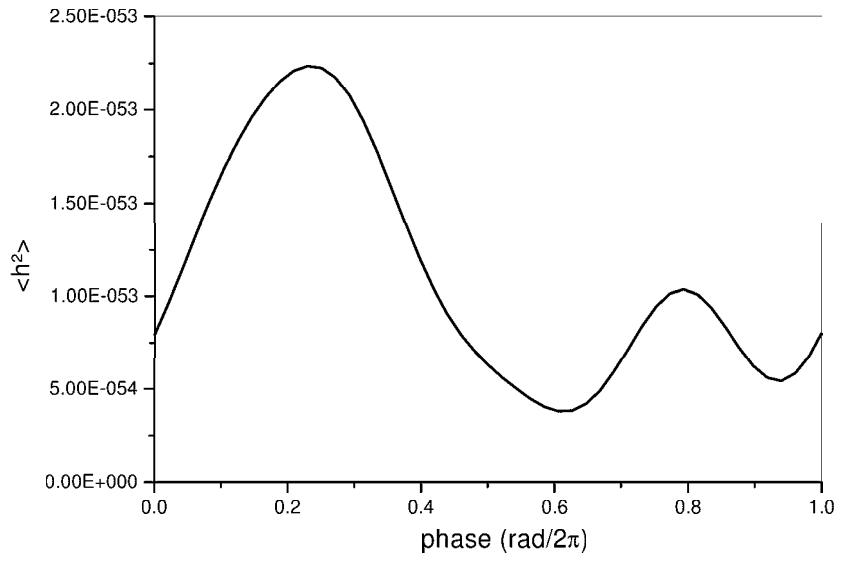


FIG. 11.10: modulation de l'amplitude quadratique d'un pulsar de période  $P=5\text{ms}$  et situé à  $d=10\text{ kpc}$

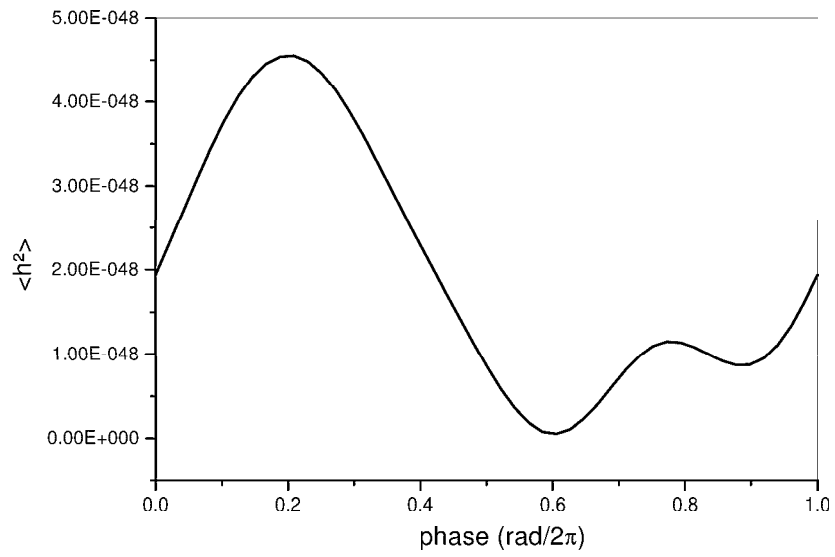


FIG. 11.11: modulation de l'amplitude quadratique d'un pulsar de période  $P=1\text{ms}$  et situé à  $d=1\text{ kpc}$

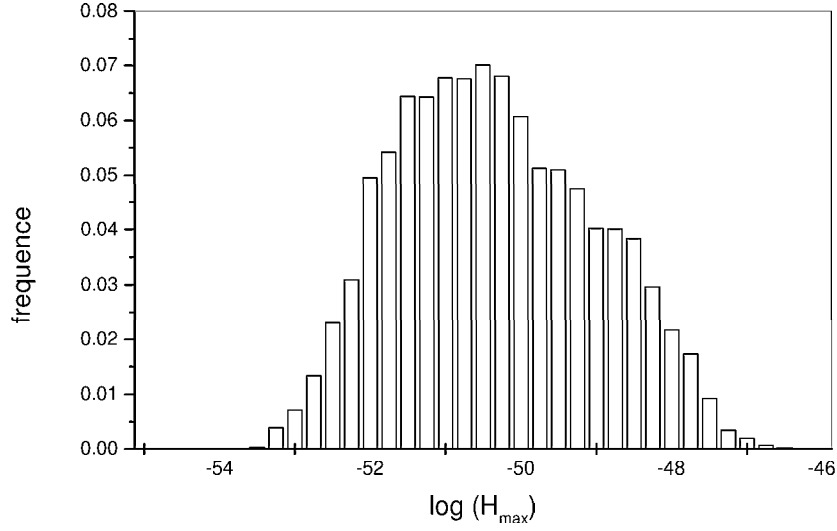


FIG. 11.12: distribution de l'amplitude quadratique maximale pour une ellipticité de  $10^{-6}$  et correspondant à 7000 expériences numériques

La densité de probabilité de  $\log H_{\max}$  peut être approchée par une distribution log-normale :

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{\exp\left(-\frac{(\ln(x-x_0)-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{x-x_0} \quad (11.10)$$

où  $x = \log H_{\max}$ ,  $x_0 = (2 \log \varepsilon - 41.75)$ ,  $m = 1.24$  et  $\sigma = 0.4$ .

La probabilité de recevoir une amplitude maximale  $\log H_{\max}$  supérieure à un seuil  $x$  donné est :

$$Q(x) = \int_x^\infty q(u) du \quad (11.11)$$

Sa valeur pour différents seuils et pour une ellipticité de  $10^{-6}$  est reportée dans le tableau (11.3).

Dans le cas de la recherche quadratique, le seuil de sensibilité est (Krauss, 1966 [62]) :

$$H_{\min} = \langle S_n \rangle \frac{\sqrt{C\Delta\nu}}{\sqrt{T}} \quad (11.12)$$

x	-52	-50	-48	-47	-46	<b>-45</b>	-44
Q(x)	0.96	0.42	0.10	0.047	0.022	<b>0.010</b>	0.0048

TAB. 11.3: probabilité de détection en fonction du seuil de sensibilité pour une ellipticité de  $10^{-6}$

où  $\Delta\nu$  est la bande de fréquence,  $\langle S_n \rangle$  la valeur moyenne de la densité spectrale du bruit sur  $\Delta\nu$ ,  $T$  le temps d'intégration et  $C$  une constante qui dépend de la réponse du détecteur (elle est égale à 2 pour un filtre rectangulaire).

Pour l'actuel VIRGO et pour un temps d'intégration de trois ans, on obtient une sensibilité de l'ordre de  $10^{-45}$  correspondant à 1% de chance d'avoir une détection. LIGO I a environ la même sensibilité mais LIGO II devrait atteindre  $10^{-47}$  et donc 5% de détection.

La population galactique des pulsars ne produit pas un véritable fond de rayonnement dans la mesure où le signal quadratique total est complètement dominé par les contributions de quelques objets rapides et proches. Dans les chapitres suivant, nous considérons le fond extra-galactique créé par l'ensemble des pulsars depuis le début de la formation stellaire.

**Quatrième partie**

**Fond de Rayonnement  
Stochastique**

# Chapitre 12

## Introduction

Selon différents scénarios de l'Univers primitif, celui-ci serait baigné d'un fond de rayonnement gravitationnel stochastique créé par la superposition de contributions d'origines diverses.

Le fond cosmologique est le résultat d'événements qui se sont produits aux premiers instants de la création de l'Univers. Le rayonnement gravitationnel émis à l'époque de la recombinaison des gravitons nous parvient aujourd'hui sans significative altération (si ce n'est un certain redshift) et sa détection constituerait un moyen unique de sonder l'Univers primordial au temps où les effets quantiques étaient encore importants (la section efficace d'interaction des gravitons  $\sigma_G$  étant très faible, leur époque de recombinaison  $t_G = \frac{1}{cn_G\sigma_G}$  est antérieure à l'ère de Planck!)

D'autres contributions de nature astrophysique cette fois, sont générées depuis le début de l'activité liée à la formation stellaire. Comme elles pourraient masquer le fond cosmologique, l'étude de leur spectre d'énergie est essentielle pour délimiter les fenêtres où rechercher le rayonnement fossile. Mieux encore, si la composante astrophysique pouvait être déterminée avec une précision suffisante (avec une incertitude inférieure au rayonnement cosmologique) sa soustraction au signal total permettrait de retrouver la signature gravitationnelle cosmologique.

Mais l'intérêt du fond de rayonnement astrophysique ne s'arrête pas là. Sa détection nous renseignerait sur le taux de formation stellaire jusqu'à des redshifts de  $z \sim 4 - 5$ , sur les masses critiques de formation des trous noirs ou des étoiles à neutrons ainsi que sur les propriétés physiques des sources comme le moment angulaire des objets compacts ou l'ellipticité des étoiles à neutrons.

Dans cette partie, nous calculerons le fond de rayonnement créé par différentes sources astrophysiques telles que les pulsars en rotation (Regimbau

et de Freitas Pacheco, 2001b [100]), les modes r et barre chez les jeunes et rapides étoiles à neutrons et les systèmes binaires d'étoiles à neutrons, sous l'hypothèse que les distributions initiales de la période et du champ magnétique de la population galactique des pulsars estimées précédemment peuvent être généralisées à la population extra-galactique. Nous nous intéresserons ensuite à la superposition de ces différentes contributions et nous envisagerons la détection du rayonnement total par la corrélation de deux détecteurs.

# Chapitre 13

## Contributions Astrophysiques

Le fond de rayonnement stochastique est caractérisé par le paramètre sans dimension

$$\Omega_{gw} = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{gw}}{d \log \nu_o} \quad (13.1)$$

où  $\rho_{gw}$  est la densité d'énergie des ondes gravitationnelles,  $\nu_o$  leur fréquence dans le repère de l'observateur et  $\rho_c$  la densité d'énergie pour avoir un Univers fermé, soit :

$$\rho_c = \frac{3H_o^2}{8\pi G} \quad (13.2)$$

où  $H_o$  est le paramètre de Hubble. Par la suite on prendra  $H_o = 68 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$  (Krauss, 2001 [63]). Le paramètre de densité  $\Omega_{gw}$  est lié à la densité spectrale du flux gravitationnel total  $F_{\nu_o}$  selon :

$$\Omega_{gw}(\nu_o) = \frac{1}{\rho_c c^3} \nu_o F_{\nu_o} \quad (13.3)$$

avec

$$F_{\nu_o} = \int_0^{z_{\max}} f_{\nu_o} dR(z) \quad (13.4)$$

La contribution individuelle d'une source localisée entre  $z$  et  $z+dz$  est donnée par :

$$f_{\nu_o} = \frac{1}{4\pi d_L^2} \frac{dE_{gw}}{d\nu_o} \quad (13.5)$$

où la distance luminosité  $d_L$  s'écrit en fonction de la distance propre et du décalage spectral :

$$d_L = (1 + z)r \quad (13.6)$$

Notons que dans l'expression (13.4), la densité spectrale du flux est donnée dans le repère de l'observateur. La fréquence observée étant liée à la fréquence de la source par la relation

$$\nu = (1 + z)\nu_o \quad (13.7)$$

on a :

$$\frac{dE_{gw}}{d\nu_o} = \frac{dE_{gw}}{d\nu}(1 + z) \quad (13.8)$$

Un fond de rayonnement d'origine astrophysique est ainsi complètement déterminé par la connaissance de la densité spectrale d'énergie gravitationnelle d'une source individuelle  $\frac{dE_{gw}}{d\nu}$  et par le taux de formation des sources en fonction du décalage spectral  $dR(z)$ .

## 13.1 Pulsars en rotation

### 13.1.1 Densité spectrale d'énergie individuelle

La densité spectrale d'énergie dans le repère de la source s'écrit :

$$\frac{dE_{gw}}{d\nu} = \frac{dE_{gw}}{dt} \left| \frac{dt}{d\nu} \right| \quad (13.9)$$

Pour une étoile à neutrons en rotation,  $\frac{dE_{gw}}{dt}$  est le taux d'énergie perdu par émission d'ondes gravitationnelles (9.34) alors que la variation temporelle de la fréquence est fixée par le freinage dipolaire magnétique (4.1). L'approximation  $\dot{E}_{rad} \gg \dot{E}_{gw}$  est valable dans la mesure où la déformation équatoriale  $\varepsilon$  est bien inférieure à  $10^{-3} - 10^{-4}$  (voir discussion relative au tableau 9.1) et l'équation

$$\dot{E}_{rot} = \dot{E}_{rad} + \dot{E}_{gw} \quad (13.10)$$

se réduit à (4.4).



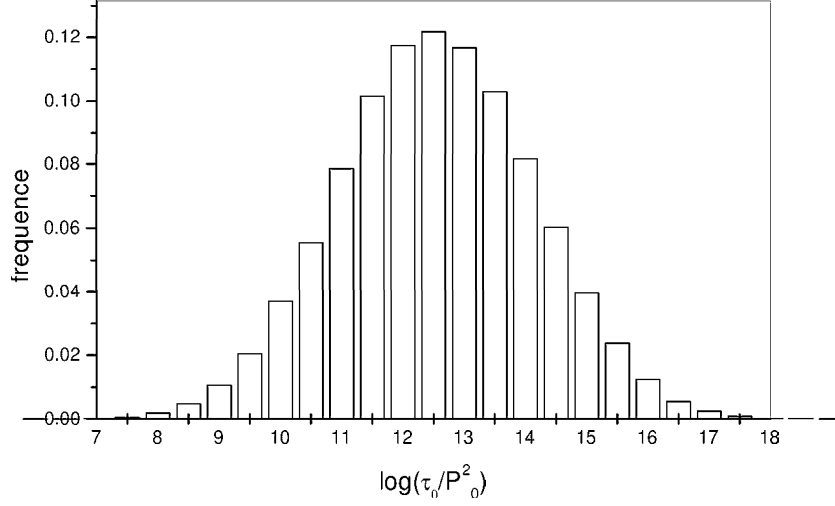


FIG. 13.1: distribution de  $\log(\frac{\tau_o}{P_o^2})$  déduite des simulations numériques de Monte Carlo (modèle A). C'est une gaussienne de valeur moyenne 12.65

La densité spectrale d'énergie s'écrit alors :

$$\frac{dE_{gw}}{d\nu} = \frac{256G\pi^6}{5c^5} \varepsilon^2 I^2 \left( \frac{\tau_o}{P_o^2} \right) \nu^3 = K \nu^3 \quad (13.11)$$

où  $\nu$  est inférieure à la fréquence de coupure correspondant à la vitesse de rotation Képlerienne  $\Omega_{\max}$  (5.1). Rappelons que pour la période minimale de 0.5 ms considérée précédemment,  $\nu_{\sup} = 4$  kHz.

Pour calculer le rapport  $\frac{\tau_o}{P_o^2}$  nous supposons que les distributions de  $P_o$  et de  $\tau_o$  calculées pour la population galactique des pulsars (modèle A) peuvent être généralisées à la population extra galactique. La figure (13.1) représente la distribution en fréquence du paramètre  $\log \frac{\tau_o}{P_o^2}$  déduite des simulations numériques de Monte Carlo. Elle est très bien représentée par une distribution gaussienne de moyenne  $\langle \log \frac{\tau_o}{P_o^2} \rangle = 12.65$ . Par la suite, on considèrera cette valeur comme représentative de la population totale et on prendra  $K = 9.27 \times 10^{35} \left( \frac{\varepsilon}{10^{-6}} \right)^2 \text{ erg Hz}^{-4}$

### 13.1.2 Taux de formation

Le taux de formation d'étoiles à neutrons entre  $z$  et  $z+dz$  est :

$$dR(z) = \lambda_p R_c(z) \frac{dV}{dz} dz \quad (13.12)$$

où  $R_c(z)$  est le taux cosmique de formation d'étoiles. Une estimation de ce paramètre est fournie par l'observation de la lumière du fond extragalactique jusqu'à des décalages spectraux  $z = 4$ . La principale source d'erreur de cette méthode est le facteur d'extinction dû à la poussière interstellaire. Madau et Pozzetti (1999) [78] ont déduit une expression de  $R_c(z)$  de mesures de la luminosité du fond extragalactique dans le continuum UV et de la luminosité des galaxies dans la raie  $H_\alpha$ . Après une correction de l'extinction basée sur la loi de Calzetti (1997) [14] de 1.2 magnitude à 1500 Å et de 0.55 magnitude à 2800 Å, ils ont obtenu :

$$R_c(z) = \frac{0.23e^{3.4z}}{(44.7 + e^{3.8z})} \text{ M}_\odot \text{ an}^{-1} \text{ Mpc}^{-3} \quad (13.13)$$

D'après Hopkins et al. (2001) [54], l'estimation de  $R_c(z)$  présente encore des écarts significatifs selon que l'on effectue les mesures dans les bandes UV- $H_\alpha$  ou dans l'infrarouge lointain et le domaine radio qui ne sont pas affectés par l'extinction. Et ceci même lorsque l'on tient compte du décalage spectral. En supposant que l'extinction est une fonction du taux de formation stellaire, ils ont obtenu un bon accord entre les estimations effectuées dans les différentes bandes spectrales. Nous avons ajusté leurs résultats par une expression de la même forme que celle donné par Madau et al. et obtenu :

$$R_c(z) = \frac{1.207e^{3.836z}}{(39.970 + e^{4.163z})} \text{ M}_\odot \text{ an}^{-1} \text{ Mpc}^{-3} \quad (13.14)$$

La figure (13.2) permet de comparer les deux modèles. Dans les deux cas, le maximum est autour de  $z \sim 1.5 - 2$  mais la courbe de Hopkins et al. est environ 6.5 fois plus élevée que celle de Madau et al.

Le paramètre  $\lambda_p$  qui apparait dans (13.12) est la fraction de masse d'étoiles formées entre 10 – 40  $\text{M}_\odot$  et supposées donner naissance à des étoiles à neutrons

$$\lambda_p = \int_{10\text{M}_\odot}^{40\text{M}_\odot} \xi(m) dm \quad (13.15)$$

En considérant pour la fonction de masse initiale une loi de Salpeter,

$$\xi(m) \propto m^{-(1+x)} \quad (13.16)$$

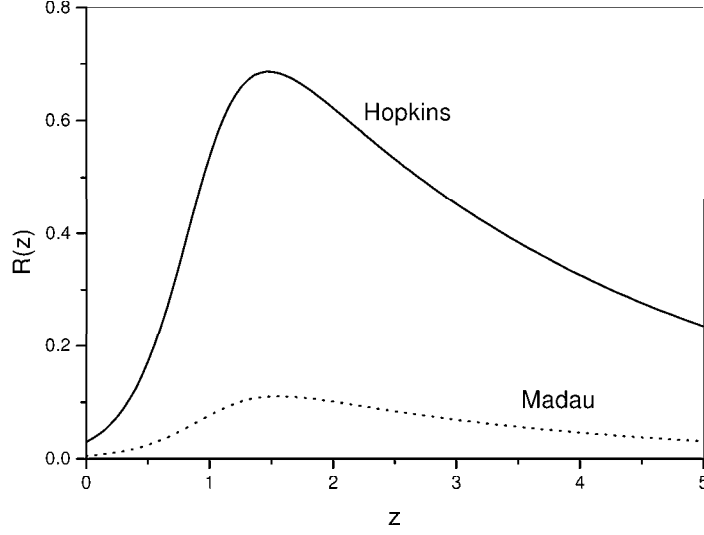


FIG. 13.2: comparaison entre le taux de formation de Madau et al., 1999 (pointillés) et celui de Hopkins et al., 2001 (trait plein)

de paramètre  $x = 1.35$  et normalisée entre  $0.1 - 80 \text{ M}_\odot$  on obtient :  $\lambda_p = 4.84 \times 10^{-3} \text{ M}_\odot^{-1}$

L'élément de volume comobile est

$$dV = 4\pi r^2 \frac{c}{H_o} \frac{dz}{E(\Omega_i, z)} \quad (13.17)$$

où  $E(\Omega_i, z)$  est définie par l'équation

$$E(z) = [\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_v]^{1/2} \quad (13.18)$$

Les paramètres de densité  $\Omega_m, \Omega_v$  et  $\Omega_k$  sont respectivement ceux de la matière (baryonique et/ou non baryonique), du vide pour une constante cosmologique non nulle et de la courbure de l'espace. En tenant compte de la relation

$$\Omega_m + \Omega_v + \Omega_k = 1 \quad (13.19)$$

(13.18) s'écrit

$$E(\Omega_i, z) = [(1+z)^2(1+z\Omega_m) - z(2+z)\Omega_v]^{1/2} \quad (13.20)$$

Nous considérons par la suite un modèle d'Univers plat avec une constante cosmologique non nulle et des paramètres de densité  $\Omega_m = 0.30$  et  $\Omega_v = 0.70$ . Ces données sont en accord avec les résultats récents de BOOMERANG et de MAXIMA (de Bernardis et al., 2000 [26] ; Hanany et al., 2000 [48]) sur le spectre de puissance du fond de rayonnement cosmique mais aussi avec les observations de supernovae lointaines de type Ia (Perlmutter et al., 1999 [94] ; Schmidt et al., 1998 [105]) qui concluent en faveur d'une expansion accélérée de l'Univers. Soulignons que nous avons effectué des simulations avec  $\Omega_m = 1$  et  $\Omega_v = 0$  et que nous n'avons noté aucun changement significatif dans nos résultats.

### 13.1.3 Fond de rayonnement stochastique

Connaissant les propriétés d'émission d'une source individuelle (en combinant 13.5 et 13.11) et le nombre d'événements par unité de volume comobile (13.12), nous pouvons calculer la densité spectrale du flux (13.4) :

$$F_{\nu_o} = \lambda_p K(\varepsilon_{-6})^2 \nu_o^3 \left(\frac{c}{H_o}\right) \int_0^{z_{\text{sup}}} \frac{(1+z)^2 R_c(z)}{E(\Omega_i, z)} dz \quad (13.21)$$

ou numériquement :

$$F_{\nu_o} = 7.5 \times 10^{-56} K(\varepsilon_{-6})^2 \nu_o^3 \int_0^{z_{\text{sup}}} \frac{(1+z)^2 R_c(z)}{E(\Omega_i, z)} dz \quad (13.22)$$

et en déduire le paramètre de densité produit par l'ensemble des pulsars depuis le début de la formation stellaire (13.3) :

$$\Omega_{gw} = 3 \times 10^{-22} (\varepsilon_{-6})^2 \nu_o^4 \int_0^{z_{\text{sup}}} \frac{(1+z)^2 R_c(z)}{E(\Omega_i, z)} dz \quad (13.23)$$

En fait, nous sommes limités à  $z < 5$ ,  $R_c(z)$  n'étant pas déterminé au delà. Cette restriction est sans conséquence significative puisque les objets avec  $z > 5$  ont une distance luminosité très importante et contribuent très peu au signal total.

La limite supérieure de l'intégrale (13.22) tient compte de la fréquence de coupure dans le repère de l'étoile  $\nu_{\text{sup}}$ . Un objet situé à  $z$  étant observé avec une fréquence maximale  $\frac{\nu_{\text{sup}}}{z+1}$ , la limite supérieure de l'intégrale est inférieure à 5 pour des fréquences supérieures à  $\frac{\nu_{\text{sup}}}{6}$  :

$$z_{\text{sup}} = \begin{cases} 5 & \text{si } \nu_o < \frac{\nu_{\text{sup}}}{6} \\ \frac{\nu_{\text{sup}}}{\nu_o} - 1 & \text{si } \nu_o \geq \frac{\nu_{\text{sup}}}{6} \end{cases} \quad (13.24)$$

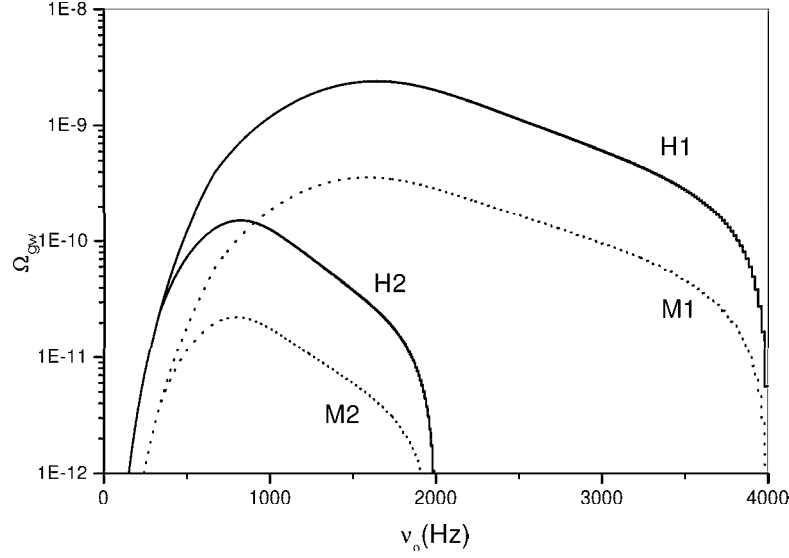


FIG. 13.3: spectre de  $\Omega_{gw}$  produit par la population cosmologique des pulsars pour des vitesses minimales de rotation de 0.5 ms (modèle 1) et 1 ms (modèle 2). Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. (pointillés) et de Hopkins et al. (trait plein)

La figure (13.3) représente la densité spectrale d'énergie en fonction de la fréquence mesurée dans le repère de l'observateur. Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. et de Hopkins et al.

Nous avons considéré deux fréquences de coupure  $\nu_{sup} = 4$  kHz (modèle 1) et 2 kHz (modèle 2) correspondant respectivement à des périodes minimales de rotation de 0.5 ms et 1 ms. Pour une fréquence de coupure de 4 kHz, le paramètre de densité  $\Omega_{gw}$  atteint  $3 \times 10^{-10}$  (M1) et  $2 \times 10^{-9}$  (H1) autour de 1.5 kHz. En réduisant de moitié  $\nu_{sup}$ , le spectre de  $\Omega_{gw}$  devient plus étroit et le maximum se déplace vers les fréquences plus basses (autour de 0.9 kHz). D'après (13.24),  $z_{sup}$  diminue aussi et l'amplitude maximale chute de plus d'un ordre de grandeur puisque seuls les objets les plus proches contribuent au signal.

Les calculs ont été faits pour  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Augmenter l'ellipticité d'un ordre de grandeur entraîne l'accroissement du paramètre de densité  $\Omega_{gw}$  de deux ordres de grandeur. La figure (13.4) montre l'influence de  $\varepsilon$  sur la courbe H1.

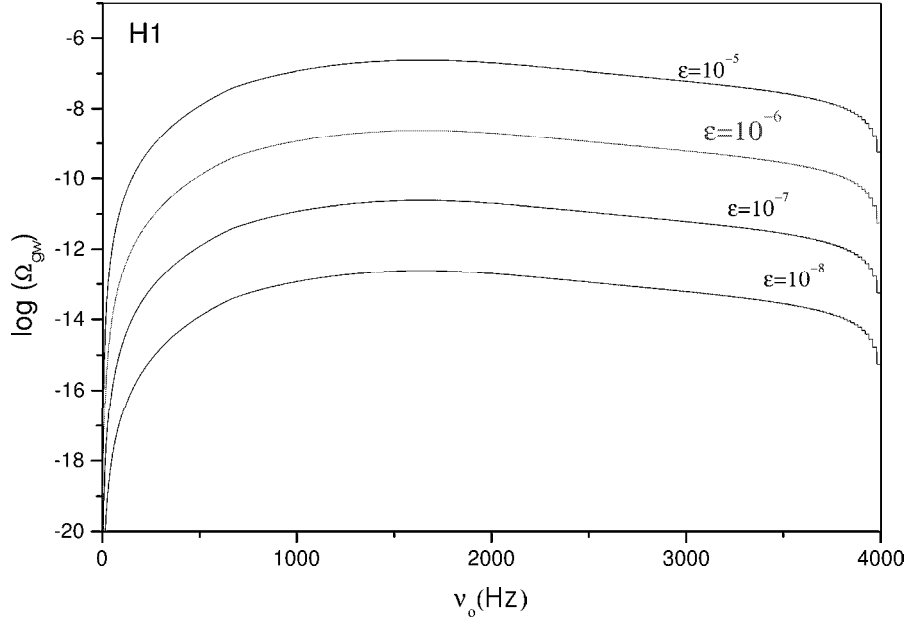


FIG. 13.4: influence du paramètre ellipticité sur le spectre de  $\Omega_{gw}$  pour une vitesse minimale de rotation de 0.5 ms avec le taux de formation d'étoiles de Hopkins et al. (modèle H1)

## 13.2 Instabilités Initiales

Parallèlement à l'émission gravitationnelle produite par la variation du moment quadrupolaire, les jeunes étoiles à neutrons en rotation rapide peuvent développer différentes instabilités comme les modes barre (Lai et Shapiro, 1995 [66]) ou les modes r (Andersson, 1998 [4] et Owen et al., 1998 [91]) et générer des ondes gravitationnelles. La superposition de leur rayonnement depuis le début de la formation stellaire contribue aussi au fond de rayonnement stochastique.

### 13.2.1 Instabilités de Chandrasekhar-Friedman-Schutz (CFS)

Les instabilités CFS ont d'abord été découvertes par Chandrasekhar (1970) [18] puis étudiées en détail par Friedman et Schutz (1978) [41] dans le cas des modes f ( $l = m$ ) et en particulier les modes barre ( $l = m = 2$ ). Récemment, Andersson (1998) [4], Friedman et Morsink (1998) [40] ont montré que les modes r étaient eux aussi sujets à ce type d'instabilités, donnant lieu à de nombreuses études.

Au lieu d'être amortie par l'émission d'ondes gravitationnelles une instabilité CFS a la particularité de croître à cause d'une différence de comportement du moment angulaire de l'onde vis à vis de deux repères de référence (figure 13.5). Pour une étoile à neutrons au repos, le rayonnement gravitationnel amortit une oscillation vers l'avant  $m > 0$  (ou vers l'arrière  $m < 0$ ) par une perte (ou un gain) de moment angulaire. Mais lorsque l'étoile tourne, elle entraîne dans son mouvement les modes d'oscillation. Si la rotation est suffisamment rapide, une oscillation dans le sens opposé restera rétrograde dans le repère de l'étoile mais deviendra prograde dans le repère d'un observateur extérieur. Et dans ce cas, le rayonnement gravitationnel entretient l'oscillation au lieu de l'amortir (par apport de moment angulaire).

Mathématiquement, le critère d'instabilité d'un processus de type CFS s'écrit :

$$\omega(\omega + m\Omega) < 0$$

où  $\omega$  est la pulsation du mode et  $\Omega$  la vitesse angulaire de l'étoile.

### 13.2.2 Modes “r”

L'excitation des modes r commence par une faible perturbation du champ de vitesse, décrite dans le cas d'une étoile barotrope Newtonienne par

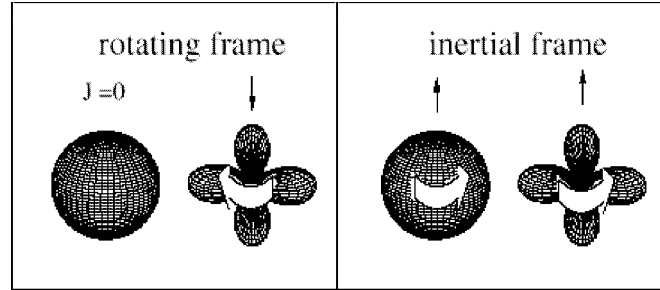


FIG. 13.5: schéma illustrant les conditions sous lesquelles une instabilité CFS se développe. Le mode est instable s'il est retrograde par rapport au fluide (gauche) mais prograde dans un repère extérieur (droite)

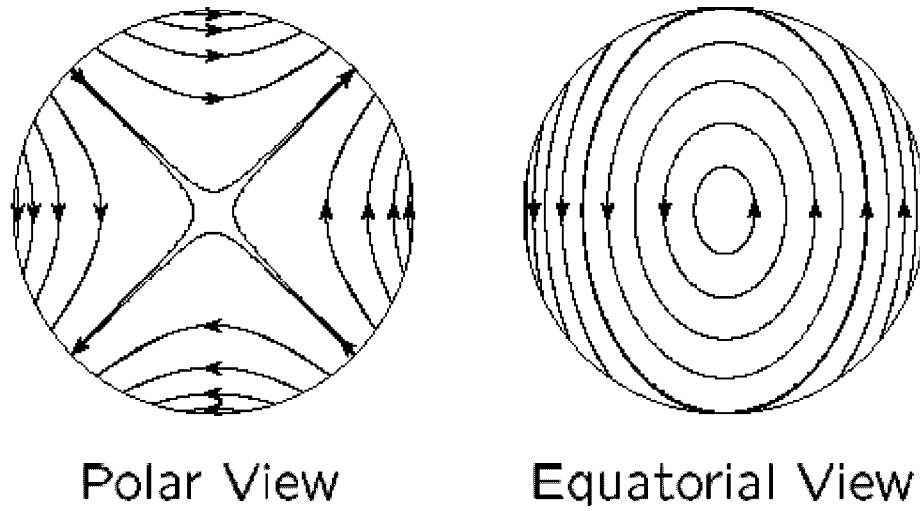


FIG. 13.6: vues polaire et équatoriale du champ de vitesse créée par le mode  $r$  dominant  $m = 1 = 2$



l'équation d'Euler :

$$\delta \vec{v} = \alpha \Omega R \left( \frac{r}{R} \right)^m \vec{r} \times \vec{\nabla} Y_{mm}(\theta, \phi) + O(\Omega^3) \quad (13.25)$$

où  $\alpha$  est l'amplitude sans dimension et  $R$  le rayon de l'étoile. Notons que la perturbation initiale du champ de vitesse n'affectant pas sensiblement la distribution de masse de l'étoile, l'émission gravitationnelle est principalement produite par la variation des moments multipolaires de courants de masse plutôt que par celle des moments multipolaires de masse.

La fréquence des modes d'oscillation est définie par :

$$\omega_r = -\frac{(m-1)(m+2)}{(m+1)}\Omega + O(\Omega^3) \quad (13.26)$$

et selon Provost, Berthomieu et Rocca (1981) [97], seuls les modes  $l = m$  existent dans le cas barotrope. Le mode dominant  $l = m = 2$  entraîne l'émission d'ondes gravitationnelles à 4/3 fois la fréquence de rotation. Les modes  $r$  correspondent à un mouvement toroïdal à grande échelle compensé par la force de Coriolis et sont comparables aux ondes de Rossby dans les océans. La figure (13.6) donne les vues polaires et équatoriales du champ de vitesse pour le mode dominant  $l = m = 2$ . Dans chacune des quatre zones (vue polaire) les éléments de fluide se déplacent le long d'ellipses concentriques (vue équatoriale).

Dans la limite des perturbations de faible amplitude (13.25), un mode  $r$  peut être décrit comme un oscillateur harmonique avec une évolution temporelle de la forme  $e^{i\omega t - \frac{t}{\tau}}$ . Si l'échelle de temps de la composante  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  est négative ( $\tau < 0$ ), la perturbation augmente et le mode est instable.

Une estimation de  $\tau$  est donnée par la variation de l'énergie du mode  $r$  dans le repère de l'étoile :

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{2E} \frac{dE}{dt} \quad (13.27)$$

Le rayonnement gravitationnel entretient l'oscillation produite par les modes  $r$  mais l'étoile à neutrons est soumise à des processus internes de viscosité qui tendent au contraire à la dissiper. Le temps d'amortissement  $\tau$  s'écrit :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{gr}} + \frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau_s} \quad (13.28)$$

où  $\tau_{gr}$ ,  $\tau_b$  et  $\tau_s$  sont respectivement les temps d'amortissement de l'émission gravitationnelle, des viscosités "bulk" et de cisaillement. Dans un modèle

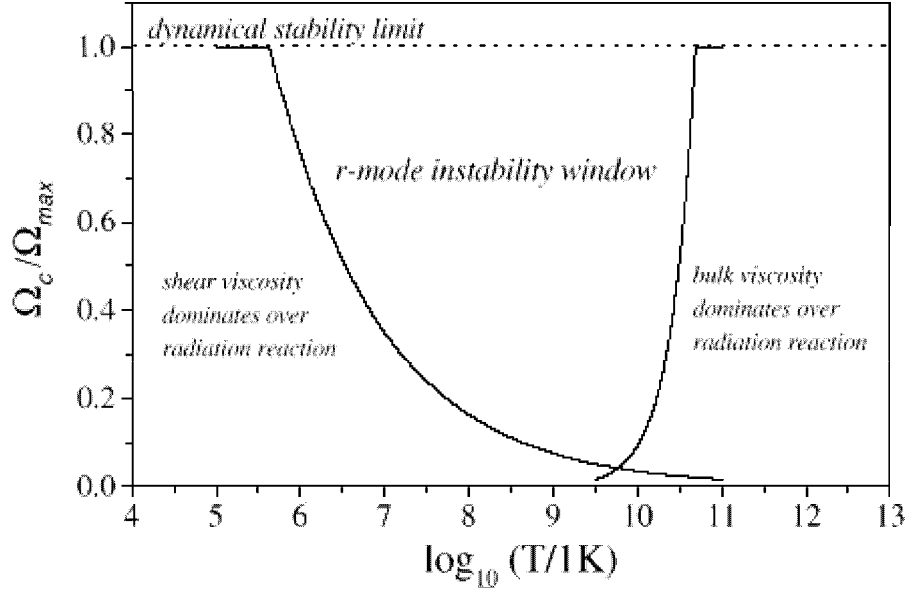


FIG. 13.7: fenêtre d'instabilité des modes  $r$   $l = m = 2$

simple Newtonien (Owen et al., 1998 [91]), les différentes composantes du temps d'amortissement s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{gr}} &= -0.303 \left( \frac{\Omega^2}{\pi G \rho} \right)^3 s^{-1} \\ \frac{1}{\tau_b} &= 5 \times 10^{-12} T_9^6 \left( \frac{\Omega^2}{\pi G \rho} \right) s^{-1} \\ \frac{1}{\tau_s} &= 3.3 \times 10^{-9} T_9^{-2} s^{-1} \end{aligned} \quad (13.29)$$

où  $T_9$  est la température en unités de  $10^9$  K.

L'échelle de temps gravitationnelle dépendant de la vitesse angulaire  $\Omega$  et celle de la viscosité dépendant aussi de la température  $T$ , il existe une fenêtre d'instabilité du mode dans le plan  $\Omega \times T$  déterminée par la condition :

$$\frac{1}{\tau(\Omega, T)} < 0 \quad (13.30)$$

Une étoile peut être instable aux modes  $r$  (figure 13.7) à des températures entre  $10^5 < T < 10^{10}$  K, et pour des vitesses angulaires supérieures à

$$\Omega_c^* = 0.045 \Omega_{\max} \quad (13.31)$$

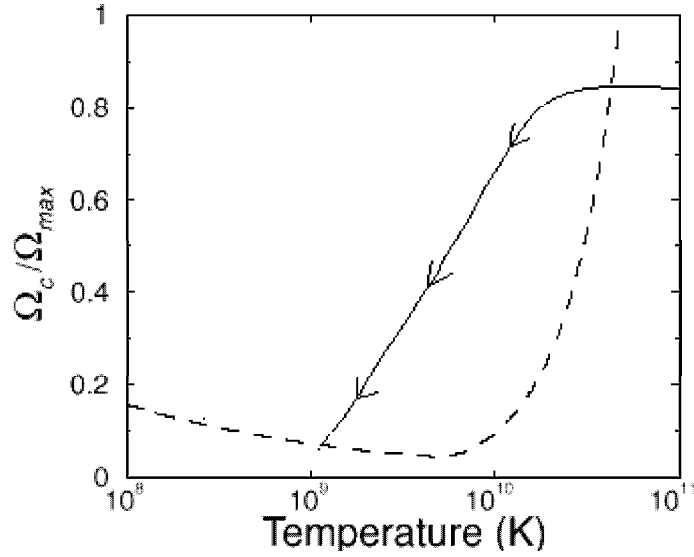


FIG. 13.8: évolution des modes  $r\ l = m = 2$  dans le plan (vitesse de rotation)-(température). Les pointillés représentent la fenêtre d'instabilité et la ligne fléchée la courbe d'évolution correspondant à une vitesse initiale Keplerienne

où  $\Omega_{\max}$  est la vitesse angulaire Keplerienne (5.1). L'instabilité est annihilée par la viscosité “bulk” au dessus de  $T \approx 10^{10}$  K et par la viscosité de cisaillement au dessous de  $10^5$  K. La valeur critique  $\Omega_c^*$  correspond à une température de l'ordre de  $10^{10}$  K.

A la naissance, une étoile à neutrons a une température de l'ordre de  $10^{11}$  K mais elle est refroidie très vite par des processus URCA ( elle atteint une température de l'ordre de  $10^9$  K au bout de quelques jours ou quelques mois selon l'équation d'état) et peut entrer dans la zone d'instabilité si sa vitesse excède  $\Omega_c^*$ .

Selon le modèle développé par Owen et al. (1998) [91] (figure 13.8) l'amplitude du mode dominant  $l = m = 2$  croît rapidement au départ de l'instabilité sur une échelle de temps de l'ordre de 500 s avant d'atteindre une phase de saturation où l'amplitude reste pratiquement constante. L'étoile dissipe alors son énergie de rotation initiale sous la forme d'ondes gravitationnelles jusqu'au moment où l'instabilité cesse, la vitesse de rotation étant devenue trop basse.

La contribution des modes  $r$  au fond de rayonnement stochastique a été estimée par Owen et al. (1998) [91] puis par Ferrari et al. (1999b) [38] à partir d'un modèle simple qui ne tient pas compte des effets relativistes, du champ magnétique ou de la formation de la croûte solide. Ces processus

sont susceptibles de diminuer l'instabilité (Lindblom, 2001 [67]) mais sont toujours à l'étude et il serait prématuré de chercher à les modéliser. Notons que la superfluidité qui apparait à  $T = 10^9$  K pourrait ne pas modifier la fenêtre d'instabilité comme on le pensait jusque là (Lindblom, 2001 [67]). Owen et al. (1998) [91] ont supposé que les étoiles à neutrons naissaient toutes avec une vitesse de rotation Képlérienne et que le taux de formation stellaire était constant. Ferrari et al (1999b) [38] ont gardé l'hypothèse de la vitesse initiale Képlérienne mais ont introduit le taux de formation stellaire de Madau et al. (1999) [78]. Nous reprenons cette étude en tenant compte de la diversité des vitesses initiales et du fait que seul un petit nombre d'objets nés avec des vitesses angulaires  $\Omega > \Omega_c^*$  peut croiser la fenêtre d'instabilité.

Pour calculer la contribution du mode  $r$ ,  $l = m = 2$  au fond de rayonnement stochastique nous avons besoin de connaître le spectre d'énergie d'une source individuelle et le taux de formation des sources.

### densité spectrale d'énergie individuelle

On suppose que la densité spectrale d'énergie d'une source est de la forme (Ferrari et al., 1999b [38])

$$\frac{dE_{gw}}{d\nu} = \frac{2E_o}{\nu_{\text{sup}}^2} \nu \quad (13.32)$$

L'étoile dissipe pendant la phase de saturation une partie de son énergie de rotation initiale sous la forme d'ondes gravitationnelles émises à  $4/3$  fois sa fréquence de rotation. Par conséquent,

$$\nu_{\text{sup}} = \frac{4}{3} \frac{\Omega_{\text{max}}}{2\pi} \quad \text{et} \quad E_0 = (E_K^i - E_K^f) \quad (13.33)$$

où  $E_K^i$  et  $E_K^f$  sont les énergies de rotation initiale et finale. La vitesse angulaire finale correspond à la vitesse critique à  $T = 10^9$  K soit,

$$\Omega_f = 0.076 \Omega_{\text{max}} \quad (13.34)$$

On suppose que les étoiles qui croisent la fenêtre d'instabilité avec des vitesses de rotation plus faibles la traversent sans être ralenties et donc sans émettre de rayonnement gravitationnel.

En considérant le modèle simple développé par Owen et al. (1998) [91] où l'étoile est un système à deux degrés de liberté ( $\Omega$ , la vitesse angulaire de l'étoile et  $\alpha$  l'amplitude des modes  $r$ ), le moment angulaire total du mode dominant  $l = m = 2$  s'écrit :

$$J(\Omega, \alpha) = (\tilde{I} - \frac{3}{2} \tilde{J} \alpha^2) \Omega M R^2 \quad (13.35)$$

où

$$\tilde{I} = \frac{8\pi}{3MR^2} \int_0^R \rho r^4 dr \quad \text{et} \quad \tilde{J} = \frac{1}{MR^2} \int_0^R \rho r^6 dr \quad (13.36)$$

et l'énergie de rotation est donnée par :

$$E_K = J(\Omega, \alpha)\Omega \quad (13.37)$$

Pour un fluide Newtonien et pour une équation d'état  $p = k\rho^{1+\frac{1}{n}}$ , d'indice polytropique  $n = 1$  (soit  $p = k\rho^2$ ) :

$$\tilde{I} = 0.261 \quad \text{et} \quad \tilde{J} = 1.635 \times 10^{-2} \quad (13.38)$$

Pendant la phase de saturation où  $\alpha \approx 1$ , on obtient :

$$E_K = 6.62 \times 10^{44} \frac{M}{1.4 M_\odot} \left(\frac{R}{10 \text{ km}}\right)^2 \Omega^2 \quad (13.39)$$

ou en fonction de la période de rotation

$$E_K = 2.61 \times 10^{46} \frac{M}{1.4 M_\odot} \left(\frac{R}{10 \text{ km}}\right)^2 \frac{1}{P^2} \quad (13.40)$$

On en déduit

$$E_0 = 2.61 \times 10^{46} \frac{M}{1.4 M_\odot} \left(\frac{R}{10 \text{ km}}\right)^2 \left(\frac{1}{P_0^2} - \frac{1}{P_f^2}\right) \quad (13.41)$$

où  $P_0$  et  $P_f$  sont respectivement les périodes de rotation initiale et finale.

Pour calculer le flux total, on remplace dans (13.32)  $E_0$  par sa valeur moyenne prise entre les périodes minimale  $P_{\min}$  et finale, correspondant respectivement à  $\Omega_{\max}$  (5.1) et  $\Omega_f$ . Rappelons que cet intervalle correspond aux objets qui traversent la fenêtre d'instabilité en perdant de l'énergie de rotation. On suppose comme au paragraphe (13.1.1) que la distribution de  $P_o$  de la population galactique des pulsars s'étend à la population extra galactique.

Pour une étoile typique de masse  $1.4 M_\odot$  et de rayon 10 km on a  $P_{\min} = 0.68 \text{ ms}$  et  $P_f = 8.94 \text{ ms}$ . Sur cet intervalle,  $\langle \frac{1}{P_o^2} \rangle = 1.48 \times 10^5 \text{ s}^{-2}$  et on en déduit  $\langle E_0 \rangle = 3.54 \times 10^{51} \text{ erg}$ . Par la suite, on notera  $\langle E_0 \rangle$  simplement  $E_0$ .

### taux de formation

Le taux de formation des sources (13.12) devient dans ce cas :

$$dR(z) = \xi \lambda_p R_c(z) \frac{dV}{dz} dz \quad (13.42)$$

où  $\xi$  est la fraction d'objets qui traverse la fenêtre d'instabilité en perdant de l'énergie de rotation.

En supposant qu'une étoile nouvellement formée n'est pas ralentie de façon significative avant de croiser la fenêtre d'instabilité,  $\xi$  est donné par

$$\xi(P_{\min}, P_f) = \int_{P_{\min}}^{P_f} g(x) dx \quad (13.43)$$

où la fonction  $g(x)$  est la densité de probabilité gaussienne de  $P_0$  déduite des simulations numériques. Pour les valeurs numériques du paragraphe précédent :  $\xi = 2.43 \times 10^{-4}$ .

### Fond de rayonnement stochastique

La densité spectrale du flux gravitationnel total est :

$$F_{\nu_o} = \frac{2E_o}{\nu_{\sup}^2} \xi \lambda_p \left( \frac{c}{H_o} \right) \nu_o \int_0^{z_{\sup}} \frac{R_c(z)}{E(\Omega_i, z)} dz \quad (13.44)$$

soit en remplaçant les constantes habituelles par leur valeur numérique :

$$F_{\nu_o} = 7.5 \times 10^{-56} \xi \frac{2E_o}{\nu_{\sup}^2} \nu_o \int_0^{z_{\sup}} \frac{R_c(z)}{E(\Omega_i, z)} dz \quad (13.45)$$

Le paramètre de densité produit par l'ensemble des modes  $r$  ( $m = 2$ ) depuis le début de la formation stellaire s'écrit :

$$\Omega_{gw} = K_r \nu_o^2 \int_0^{z_{\sup}} \frac{R_c(z)}{E(\Omega_i, z)} dz \quad (13.46)$$

où

$$K_r = 3.2 \times 10^{-58} \xi \frac{2E_o}{\nu_{\sup}^2} \quad (13.47)$$

et où  $z_{\sup}$  est donné par (13.24) avec  $\nu_{\sup} = 1958$  Hz. Les autres quantités ont la même expression qu'aux paragraphes précédents.

modèle	$R$ (km)	$P_{\min}-P_f$ (ms)	$\xi$	$\nu_{\sup}$ (Hz)	$K_r$ (cgs)
1	10	0.68-8.94	$2.43 \times 10^{-4}$	1958	$1.43 \times 10^{-16}$
2	12.53	0.95-12.5	$3.64 \times 10^{-4}$	1396	$3.24 \times 10^{-16}$

TAB. 13.1:

Numériquement, on obtient :

$$\Omega_{gw} = 1.43 \times 10^{-16} \nu_o^2 \int_0^{z_{\sup}} \frac{R_c(z)}{E(\Omega_i, z)} dz \quad (13.48)$$

De façon à comparer nos résultats avec ceux obtenus par Owen et al. (1998) [91] et Ferrari et al. (1999b) [38], nous avons aussi fait le calcul pour une étoile de masse  $1.4 M_{\odot}$  et de rayon  $R = 12.53$  km. Les différents paramètres de ce modèle (par la suite modèle 2) sont présentés dans le tableau (13.1) et comparés à ceux du modèle précédent (ou modèle 1).

Les courbes de la figure (13.9) représentent le paramètre de densité  $\Omega_{gw}$  en fonction de la fréquence mesurée dans le repère de l'observateur. Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. (1999) [78] et de Hopkins et al. (2001) [54].

Les modèles 1 et 2 ont des périodes minimales de rotations différentes et par conséquent des fréquences de coupures différentes (13.33). Pour une fréquence de coupure de 1958 Hz (modèle 1),  $\Omega_{gw}$  atteint  $4.1 \times 10^{-12}$  (M1) et  $2.7 \times 10^{-11}$  (H1) autour de 700 Hz. Une diminution de  $\nu_{\sup}$  jusqu'à 1396 Hz (modèle 2) produit un effet similaire à celui que l'on avait observé pour les pulsars en rotation, le spectre de  $\Omega_{gw}$  devient plus étroit et le maximum se déplace vers les fréquences plus basses (environ 500 Hz). Par contre, à la différence des pulsars en rotation, l'amplitude ne diminue pas avec  $\nu_{\sup}$  et est même un peu plus élevée pour le modèle 2, atteignant  $4.7 \times 10^{-12}$  (M2) et  $3.1 \times 10^{-11}$  (H2). Dans le cas des modes r, la chute de l'amplitude due à la diminution de  $z_{\sup}$  est compensée par l'augmentation de la période minimale Képlérienne et par l'élargissement de l'intervalle entre les périodes minimale et maximale. D'un côté les objets qui contribuent au signal sont les plus proches mais de l'autre la fraction d'objets qui croise la fenêtre d'instabilité est plus élevée.

Le paramètre de densité  $\Omega_{gw}$  des modes r est faible comparé à celui obtenu pour les pulsars en rotation (on note une différence de deux ordres de grandeur entre les deux). En fait, bien qu'un événement individuel soit très énergétique, très peu d'objets contribuent au signal total. En effet seule une faible fraction d'étoiles à neutrons naît avec une vitesse de rotation suffisamment élevée pour croiser la fenêtre d'instabilité et la fréquence de coupure étant plus faible seuls les objets proches sont détectables aujourd'hui.

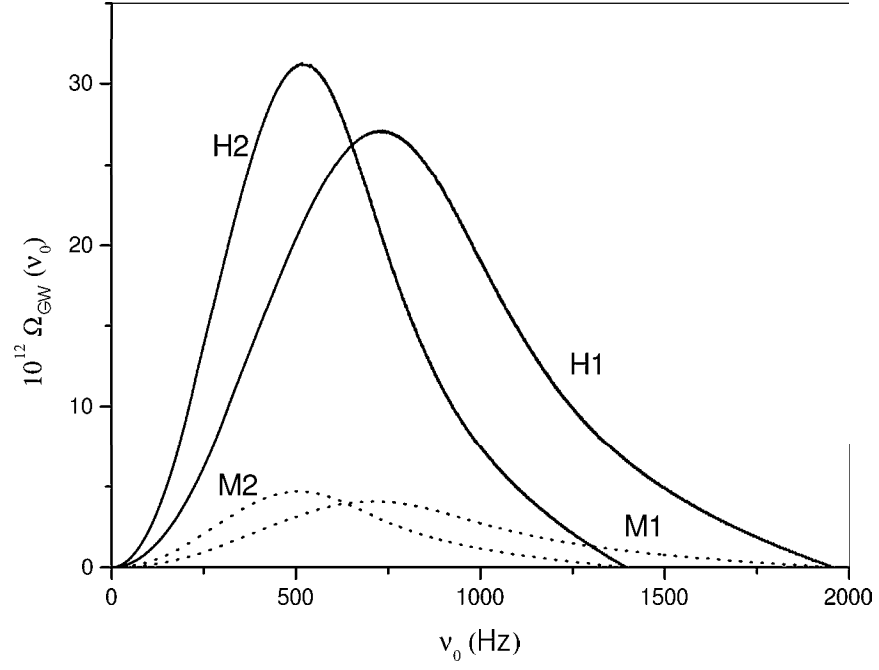


FIG. 13.9: spectre de  $\Omega_{gw}$  produit par les modes  $r$  ( $m = 1 = 2$ ) pour des étoiles de rayons 10 km (modèle 1) et 12.53 km (modèle 2). Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. (pointillés) et de Hopkins et al. (trait plein)



Il est intéressant de comparer les résultats du modèle 2 avec ceux obtenus par Owen et al. (1998) [91] et Ferrari et al. (1999b) [38] (figure 13.10) qui obtiennent un paramètre de densité maximal de l'ordre de  $\Omega_{gw} \approx (3 - 6) \times 10^{-8}$ . Leurs estimations sont basées sur l'hypothèse que toutes les étoiles à neutrons sont formées à la vitesse de rotation maximale et croisent la fenêtre d'instabilité. D'après nos simulations, ce n'est le cas que pour une faible fraction d'objets ( $\xi = 3.64 \times 10^{-4}$ ) réduisant les estimations de quatre ordres de grandeur. Owen et al. (1998) [91] obtiennent une fréquence optimale autour de 280 Hz. Ces auteurs ont considéré un taux de formation stellaire constant entre  $z = 0 - 4$  et le maximum du spectre correspond à l'énergie émise à  $z = 4$  à la fréquence  $\nu_{\text{sup}} = 1396$  Hz. Ferrari et al. (1999b) [38] au contraire ont utilisé le taux de formation stellaire de Madau et al. (1999) [78] qui prédit un nombre plus important de sources à  $z = 1.3$ , et obtiennent le maximum du spectre autour de la fréquence correspondante de 600 Hz. L'amplitude est ensuite constante jusqu'à une fréquence d'environ 1.2 kHz, la décroissance du taux de formation stellaire compensant l'élargissement de l'élément de volume comobile considéré. Comme Ferrari et al. (1999b) [38], nous avons tenu compte du taux de formation stellaire de Madau et al. (1999) [78] (modèle M2) mais nous avons considéré une distribution non constante de la vitesse initiale de rotation. Pour cette raison, le signal que nous obtenons ne présente pas de plateau et la fréquence optimale est plus faible, de l'ordre de 500 Hz.

### 13.2.3 Modes barre

Une étoile à neutrons en rotation peut développer une instabilité non axi-symétrique si le rapport  $\beta = \frac{T}{|W|}$  entre l'énergie de rotation et l'énergie gravitationnelle est suffisamment élevé (Chandrasekhar, 1969 [19]). Cette instabilité correspond aux modes d'oscillation  $l = m = 2$  appelés mode "barre" parce qu'ils donnent à l'étoile une forme allongée.

Une étoile à neutrons peut être **dynamiquement** instable aux modes barre quand  $\beta \geq 0.27$  (la croissance de l'instabilité est déterminée par l'échelle de temps hydrodynamique) ou **séculairement** instable sous l'effet de processus de dissipation (viscosité ou radiation gravitationnelle) quand  $\beta \geq 0.14$  (l'échelle de temps de la dissipation la plus courte conditionne alors la croissance de l'instabilité).

A la naissance, une étoile à neutrons a de fortes chances d'évoluer vers un ellipsoïde de Jacobi et de devenir instable dynamiquement. D'après le modèle de Houser et al. (1994) [55], l'instabilité entraîne une perte de masse sous la forme de deux bras spiraux qui finissent par fusionner dans le plan de l'équateur provoquant une dissipation du moment angulaire par ondes de choc. Le

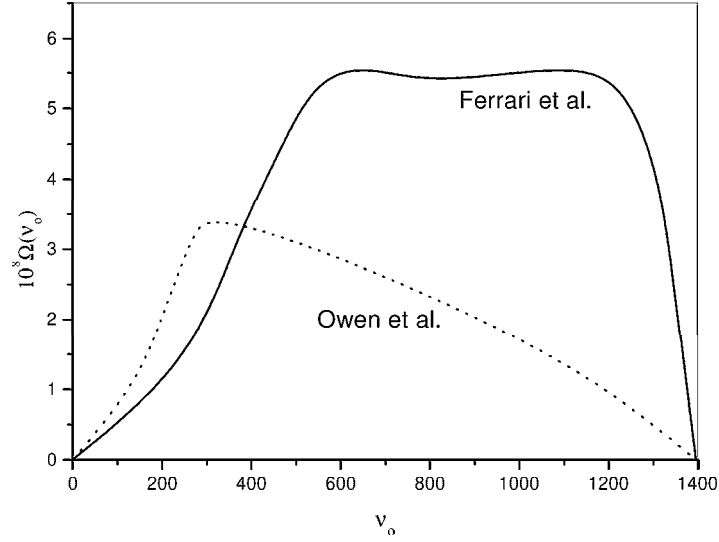


FIG. 13.10: spectre de  $\Omega_{gw}$  produit par les modes  $r$  pour les modèles de Ferrari et al., 1999 (trait plein) et de Owen et al., 1998 (pointillés)

système évolue vers un état d'équilibre axi-symétrique (un sphéroïde de Maclaurin) dynamiquement stable mais toujours séculairement instable. L'étoile devient un ellipsoïde de Dedekind si la radiation gravitationnelle prend le dessus sur la viscosité et un ellipsoïde de Jacobi dans le cas contraire. La transition vers une configuration de Dedekind donne naissance à des ondes hydrodynamiques qui se propagent dans les couches externes du manteau dans le sens inverse de la rotation. D'après Lai et Shapiro (1995) [66], la fréquence des ondes gravitationnelles émises pendant la transition décroît avec le moment angulaire de quelques centaines de Hertz à zéro. Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons au rayonnement gravitationnel émis pendant la transition Maclaurin/Dedekind. Nous calculerons comme aux paragraphes précédents la contribution des modes barre au fond de rayonnement stochastique à partir du spectre d'énergie d'une source individuelle et du taux de formation des sources.

### sphéroïde de Maclaurin

La rotation d'une étoile provoque son aplatissement aux pôles et l'élargissement de son rayon à l'équateur. Un corps homogène en rotation uniforme autour d'un des axes de symétrie prend ainsi la forme d'un sphéroïde de Ma-

claurin. Pour un sphéroïde en équilibre gravitationnel et caractérisé par son excentricité  $e$ , Maclaurin a établi la relation suivante :

$$\hat{\Omega}^2 = \frac{\Omega^2}{\pi G \rho} = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e^3} 2(3 - 2e^2) \sin^{-1} e - \frac{6}{e^2} (1 - e^2) \quad (13.49)$$

généralisée au cas des corps compressibles et non homogènes (Lai et Shapiro, 1995 [66]) par la relation :

$$\hat{\Omega}^2 = q_n \frac{\Omega^2}{\pi G \bar{\rho}} \quad (13.50)$$

où

$$q_n = (1 - \frac{n}{5}) k_n \quad (13.51)$$

( $k_n$  est une constante de l'ordre de l'unité qui dépend de l'indice polytropique  $n$ , Lai et al., 1993, table 1 [65])  
et où

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (13.52)$$

est la densité moyenne de l'étoile. Dans cette expression,  $R$  est le rayon moyen. Il diffère du rayon  $R_0$  de l'étoile au repos, les dimensions de l'étoile augmentant sous l'effet de la force centrifuge. Pour une excentricité  $e$  donnée, on définit le paramètre sans dimension :

$$\hat{R} = (\frac{R}{R_0})^{(3-n)/n} \quad (13.53)$$

On en déduit :

$$R = R_0 \hat{R}^{n/(3-n)} \quad (13.54)$$

et en remplaçant cette expression dans (13.52), on obtient

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 \hat{R}^{-3n/(3-n)} \quad (13.55)$$

Un autre paramètre du sphéroïde est le rapport  $\beta = \frac{T}{|W|}$  qui s'écrit

$$\beta = \frac{3}{2e^2} (1 - \frac{e(1 - e^2)^{1/2}}{\sin^{-1} e}) - 1 \quad (13.56)$$

Les quantités  $\beta$ ,  $\hat{\Omega}^2$  et  $\hat{R}$  sont tabulées en fonction de  $e$  dans Lai et al. (1993) [65].

Pour notre étude, nous aurons besoin d'exprimer la période de l'étoile en fonction des paramètres tabulés. D'après (13.50), elle s'écrit :

$$P = \frac{2\pi}{\Omega} = 2 \left( \frac{\pi q_n}{G\bar{\rho}} \right)^{1/2} \hat{\Omega}^{-1} \quad (13.57)$$

et en remplaçant  $\bar{\rho}$  par son expression (13.52) on obtient :

$$P = \frac{2\pi}{\Omega} = 2 \left( \frac{\pi q_n}{G\bar{\rho}_0} \right)^{1/2} \hat{R}^{\frac{3n}{2(3-n)}} \hat{\Omega}^{-1} \quad (13.58)$$

Comme précédemment pour les modes r, nous avons considéré une équation d'état avec indice polytropique  $n = 1$ . Selon Stergioulas et Friedman (1998) [109], les équations d'états associées à cet indice rendent bien compte des masses et des rayons des étoiles à neutrons. En remplaçant les constantes dépendant de n par leur valeur numérique dans (13.58) on obtient :

$$P(\text{ms}) = \frac{2\pi}{\Omega} = 0.384 \left( \frac{R_0}{10km} \right)^{3/2} \left( \frac{M}{1.4M_\odot} \right)^{-1/2} \hat{R}^{3/4} \hat{\Omega}^{-1} \quad (13.59)$$

où  $q_1$  est calculé à partir de (13.51) avec  $k_1 = 0.65345$ .

### taux de formation

Le taux de formation des sources est donné par la formule (13.42) où  $\xi$  est la fraction d'objets qui entre dans la fenêtre d'instabilité séculaire

$$0.1375 < \beta < 0.2738 \quad (13.60)$$

Il est plus facile pour nous de traduire cette inégalité en terme de période :

$$P_{\min} < P < P_{\max} \quad (13.61)$$

et de calculer  $\xi$  comme au paragraphe précédent à partir de la densité de probabilité gaussienne de  $P_0$  déduit des simulations numériques (13.43)

Connaissant  $\hat{\Omega}^2$  et  $\hat{R}$  pour une valeur donnée de  $\beta$  (Lai et al., 1993 [65], tableau 3), l'équation (13.59) nous permet d'établir une correspondance entre la période et le paramètre  $\beta$  (figure 13.11). Dans la zone d'instabilité (13.60), elle est bien représentée par la relation :

$$P(\text{ms}) = \left( \frac{R_0}{10 \text{ km}} \right)^{3/2} \left( \frac{M}{1.4 M_\odot} \right)^{-1/2} \times (1.127 - 4.621\beta + 17.108\beta^2) \quad (13.62)$$

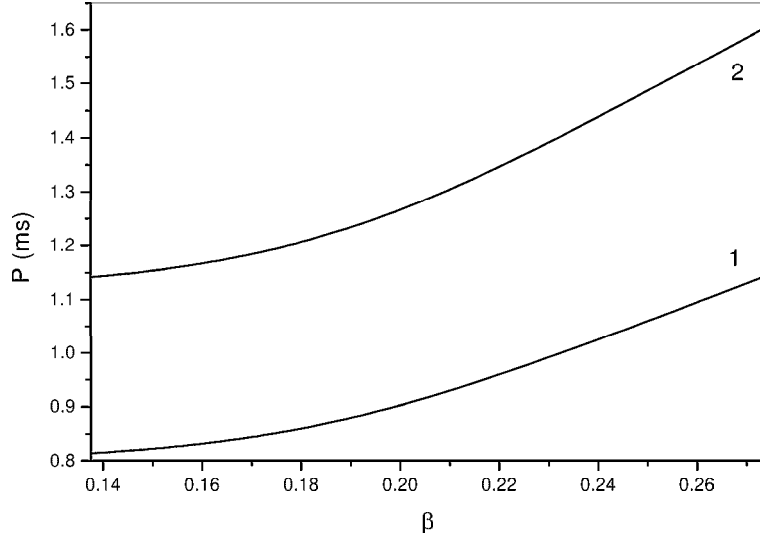


FIG. 13.11: paramètre  $\beta$  en fonction de la période pour des étoiles de rayons moyens 10 km (1) et 12.53 km (2)

Dans cet intervalle, la période décroît en fonction de  $\beta$  et les périodes minimale ( $P_{\min}$ ) et maximale ( $P_{\max}$ ) correspondent respectivement à  $\beta = 0.1375$  et  $\beta = 0.2738$ .

Comme pour les modes r, nous avons considéré deux modèles : des étoiles de masse  $1.4 M_{\odot}$  et de rayon  $R_0 = 10$  km (modèle 1) et 12.53 km (modèle 2). Par souci de clarté, nous ne donnerons que les résultats numériques intermédiaires du modèle 1.

A partir de (13.62), on obtient  $P_{\min} = 0.82$  ms,  $P_{\max} = 1.14$  ms et on en déduit  $\xi = 8.2 \times 10^{-6}$ . On remarque que cette fraction est inférieure d'environ un ordre et demi de grandeur à celle obtenue pour les modes r.

### densité spectrale d'énergie

Selon Lai et Shapiro (1995) [66], la densité spectrale d'énergie d'une source a la même forme que celle des modes r (13.32). Dans cette expression,  $E_0$  correspond à la différence entre les énergies à l'équilibre d'un sphéroïde de Maclaurin et d'un ellipsoïde de Dedekind. A partir des courbes donnant  $E_0$  et  $\nu_{\text{sup}}$  en fonction de  $\beta$  (Lai et Shapiro, 1995 [66], figures 3 et 5) et de la relation (13.62), nous avons établi une expression des paramètres  $E_0$  et  $\nu_{\text{sup}}$  en fonction de la période exprimée en ms (figures 13.12 et 13.13). Pour le

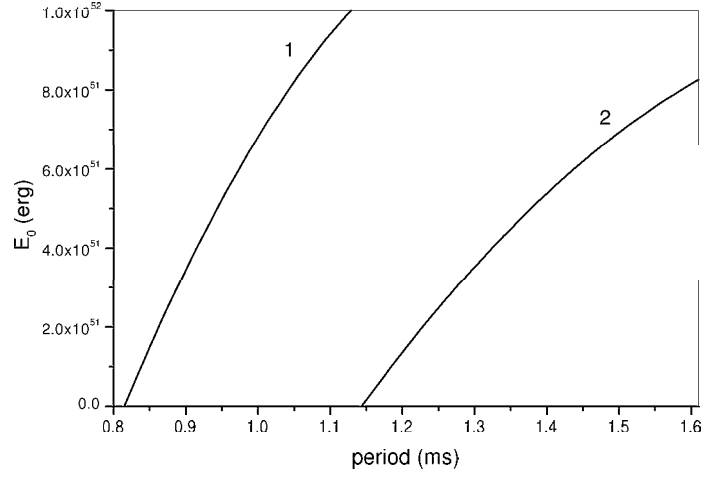


FIG. 13.12: énergie libérée pendant la transition Maclaurin/Dedekind pour des étoiles de rayons moyens 10 km (1) et 12.53 km (2)

modèle 1 on a :

$$E_0 = 10^{52}(-6.12 + 10.64P - 3.83P^2) \text{ erg} \quad (13.63)$$

et

$$\nu_{\text{sup}} = 10^4(-5.30 + 15.76P - 15.50P^2 + 5.10P^3) \text{ Hz} \quad (13.64)$$

Pour le modèle 2,

$$E_0 = 10^{52}(-4.88 + 6.05P - 1.55P^2) \text{ erg} \quad (13.65)$$

et

$$\nu_{\text{sup}} = 10^4(-3.78 + 8.01P - 5.62P^2 + 1.32P^3) \text{ Hz} \quad (13.66)$$

Pour le calcul du flux total, on remplace  $\frac{2E_0}{\nu_{\text{sup}}^2}$  dans (13.32) par sa valeur moyenne évaluée dans l'intervalle d'instabilité  $[P_{\text{min}}; P_{\text{max}}]$ . Le modèle 1 donne  $\langle \frac{2E_0}{\nu_{\text{sup}}^2} \rangle = 3.7 \times 10^{46} \text{ cgs}$ . Par la suite on omettra le symbole  $\langle \rangle$ .

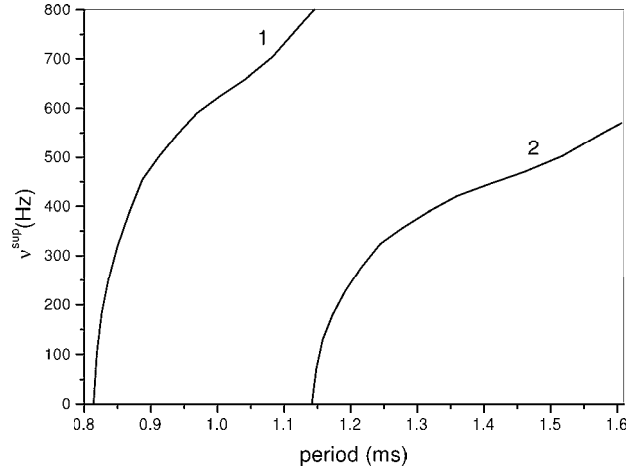


FIG. 13.13: fréquence maximale d'émission des modes barre en fonction de la période pour des étoiles de rayons moyens 10 km (1) et 12.53 km (2)

modèle	$R$ (km)	$P_{\min} - P_f$ (ms)	$\xi$	$\nu_{\text{sup}}$ (Hz)	$K_r$ (cgs)
1	10	0.82 – 1.14	$8.18 \times 10^{-6}$	544	$9.68 \times 10^{-17}$
2	12.53	1.14 – 1.60	$1.17 \times 10^{-5}$	363	$2.56 \times 10^{-16}$

TAB. 13.2:

### Fond de rayonnement stochastique

Le paramètre de densité produit par l'ensemble des modes barre depuis le début de la formation stellaire est donné par (13.46) comme dans le cas des modes r. Dans cette expression,  $z_{\text{sup}}$  est calculé à partir de la valeur moyenne de  $\nu_{\text{sup}}$  évaluée dans l'intervalle d'instabilité. Numériquement, on obtient pour le modèle 1,

$$\Omega_{gw} = 9.68 \times 10^{-17} \nu_o^2 \int_0^{z_{\text{sup}}} \frac{R_c(z)}{E(\Omega_i, z)} dz \quad (13.67)$$

où  $z_{\text{sup}}$  est donné par (13.24) avec  $\langle \nu_{\text{sup}} \rangle = 544$  Hz.

Le tableau (13.2) compare les paramètres des modèles 1 et 2.

La figure (13.14) représente le paramètre de densité d'énergie en fonction de la fréquence mesurée dans le repère de l'observateur. Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. (1999) [78] et de Hopkins et al. (2001) [54].

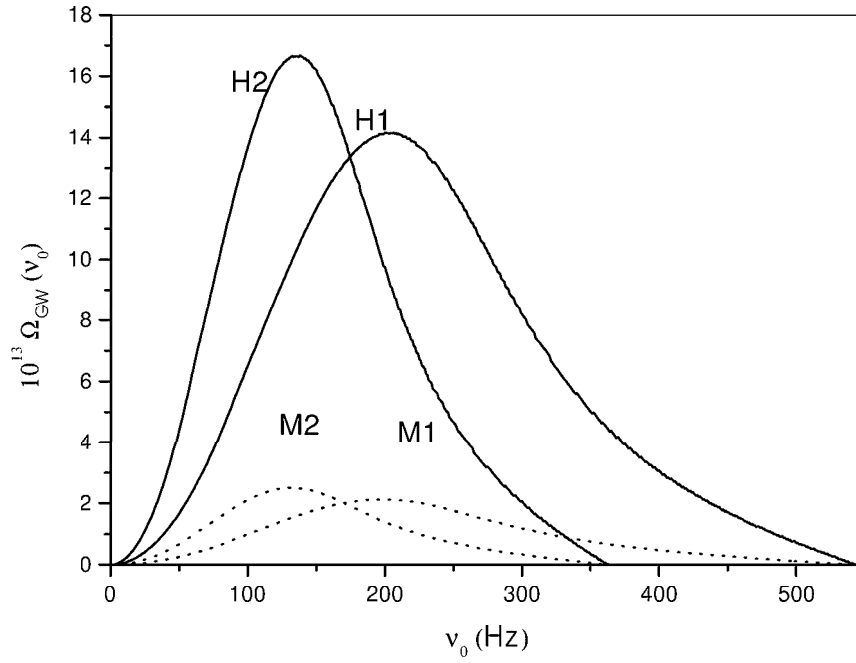


FIG. 13.14: spectre de  $\Omega_{gw}$  produit par les modes barre pour des étoiles de rayons 10 km (modèle 1) et 12.53 km (modèle 2). Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. (pointillés) et de Hopkins et al. (trait plein)

Les modèles 1 et 2 ont des fréquences de coupures différentes et les conclusions sont les mêmes que pour les modes r. Pour une fréquence de coupure de 544 Hz (modèle 1), le paramètre de densité d'énergie atteint  $2.1 \times 10^{-13}$  (M1) et  $1.4 \times 10^{-12}$  (H1) autour de 200 Hz. Une diminution de  $\nu_{\text{sup}}$  jusqu'à 363 Hz (modèle 2) produit un rétrécissement du spectre de  $\Omega_{gw}$  et un déplacement du maximum vers les fréquences plus basses (environ 130 Hz). Comme pour les modes r, l'amplitude est pratiquement insensible à la variation de  $\nu_{\text{sup}}$ , la diminution de  $z_{\text{sup}}$  qui en résulte étant compensée par l'augmentation du nombre d'objets dans la fenêtre d'instabilité. L'amplitude de  $\Omega_{gw}$  est cependant un peu supérieure pour le modèle 2, atteignant  $2.5 \times 10^{-13}$  (M2) et  $1.7 \times 10^{-12}$  (H2).

Le paramètre de densité  $\Omega_{gw}$  des modes barre est très faible par rapport aux pulsars en rotation et même par rapport aux modes r : une faible fraction d'étoiles entre la fenêtre d'instabilité et la fréquence de coupure étant faible seuls les objets proches sont détectables aujourd'hui.



## 13.3 Coalescences de Binaires NS/NS

La coalescence de paires d'objets massifs est une source très prometteuse d'émission gravitationnelle et sans doute la plus étudiée. Ici, nous proposons un modèle pour calculer le taux de naissance des systèmes binaires d'étoiles à neutrons (NS/NS) dans notre Galaxie. En extrapolant ce résultat aux autres galaxies, nous en déduisons le taux de coalescence en fonction du redshift et calculerons le fond de rayonnement stochastique créé par la superposition de ces systèmes depuis le début de la formation stellaire.

### 13.3.1 Modèle

Plusieurs études ont été menées pour estimer le taux de coalescence galactique des paires NS/NS. Malheureusement, le nombre important de paramètres incertains rendent les études analytiques peu fiables et le faible échantillon dont on dispose (5 systèmes NS/NS connus, tableau 13.3) ne permet pas de faire une étude statistique directe. Une solution est d'étudier les binaires NS/NS par l'intermédiaire d'autres étoiles à neutrons observées en plus grand nombre. Récemment, Kalogera et Lorimer (2000) [58] se sont servis des pulsars isolés partiellement réaccélérés qui ont des propriétés similaires à celles de l'étoile la plus âgée du système binaire. Dans cette étude, nous proposons de relier la population des paires NS/NS à celle des pulsars normaux via l'étoile à neutrons la plus jeune du système. Cette méthode présente l'avantage d'utiliser la population de pulsars dont l'échantillon observé est le plus important et dont les propriétés sont les mieux connues.

Nous considérons le modèle maintenant admis selon lequel une paire NS/NS naît d'un système binaire de deux étoiles massives (voir figure 2.4). L'étoile la plus massive explose la première en supernova et donne naissance à un pulsar radio. Lorsque la seconde étoile arrive à son tour en fin d'évolution, elle devient une géante rouge, remplit son lobe de Roche et de la matière est transférée sur l'étoile à neutrons compagnon qui est ainsi réaccélérée. La seconde étoile explose ensuite en supernova. Si les deux étoiles restent liées après l'explosion, on a un système binaire NS/NS composé d'un pulsar réaccéléré et d'un pulsar radio jeune.

Nous basons notre étude sur deux hypothèses :

1. le second pulsar est soumis aux mêmes statistiques et au même mécanisme de freinage dipolaire magnétique que les pulsars radio normaux.
2. la vitesse du kick du second pulsar (dûe à son explosion en supernova) est faible puisqu'il y a conservation de la binarité. Cette vitesse s'apparente à celle des pulsars millisecondes (réaccélérés dans des systèmes binaires) dont l'explosion en supernova n'avait pas rompu la binarité.

PSR	P (ms)	logB (G)	âge (Man)	P <sub>b</sub> (j)	M <sub>c</sub> (M <sub>☉</sub> )	e
J1518+49	40.94	9.1	1000	8.634	1.01	0.249
B1534+12	37.90	10.0	250	0.421	1.34	0.274
B1820+11	279.83	11.8	3.3	357.762	0.8	0.795
B1913+16	59.03	10.4	110	0.323	1.39	0.617
B2303+46	30.53	10.1	100	12.340	1.46	0.658

TAB. 13.3: propriétés des pulsars en systèmes NS/NS (période, champ magnétique, âge, période orbitale, masse du compagnon et excentricité de l’orbite)

Connaissant les paramètres d’évolution des pulsars normaux (modèle A), nous reprenons notre code numérique pour calculer le nombre de paires NS/NS de la population réelle (ou de façon équivalente le nombre de second pulsars  $N_b$ ) nécessaire à reproduire l’échantillon de systèmes binaires observés via le second pulsar. Parmi les 5 systèmes binaires NS/NS connus dans la Galaxie, un seulement est observé grâce au second pulsar. Il s’agit de B1820-10, dont la période, l’âge et le champ magnétique sont comparables à ceux des pulsars radio isolés (tableau 13.3). Ce pulsar ayant été détecté à Jodrell Bank, nos simulations ne prennent en compte que l’antenne Lovell76.

On estime le taux de naissance actuel des systèmes binaires  $R_b$  par le taux de naissance du second pulsar radio :

$$R_b = \frac{N_b}{t_{\max}} \quad (13.68)$$

où  $t_{\max}$  est la durée de la phase pulsar donnée par le modèle A.

Nous obtenons un taux de naissance actuel des systèmes binaires NS/NS de  $R_b = 1.7 \times 10^{-5} \text{an}^{-1}$ . Notons toutefois que si le compagnon de B1820-10 n’est pas une autre étoile à neutrons mais une étoile de la séquence principale (Phinney et Verbunt, 1991 [95]) cette estimation devient une simple limite supérieure. Notre estimation est compatible avec d’autres études qui ont été menées récemment. Yungelson et al. (1998) [123] obtiennent un taux de naissance de  $3.4 \times 10^{-5} \text{an}^{-1}$ , Kalogera et Lorimer (2000) [58] évaluent sa limite supérieure à  $7 \times 10^{-7} - 1.5 \times 10^{-5} \text{an}^{-1}$ . Notons qu’il s’agit bien ici du taux de formation et non du taux de coalescence que certains auteurs confondent à tort.

### 13.3.2 Taux de coalescence

Dans les cas considérés jusqu’à présent, le taux d’événements correspondait au taux de formation des sources. Mais pour cette étude, nous avons besoin de calculer le taux de coalescence des systèmes binaires NS/NS.

Si  $R_b$  est le taux de formation de systèmes binaires d'étoiles à neutrons et si  $P_z(z)$  est la probabilité pour tel système de s'effondrer sur une échelle  $z$ , le taux de coalescence cosmique s'écrit :

$$dR(z) = \frac{dV}{dz} dz \int_z^{z_{\text{sup}}} R_b(z' - z) P_z(z') dz' \quad (13.69)$$

Le taux de formation de systèmes binaires à  $z$  s'écrit :

$$R_b(z) = \lambda_b R_c(z) \quad (13.70)$$

où  $R_c(z)$  est le taux de formation stellaire et  $\lambda_b$  la fraction de masse donnant des systèmes doubles d'étoiles à neutrons. On suppose que le paramètre  $\lambda_b$  est identique pour toutes les galaxies et qu'il ne dépend pas de leur stade d'évolution. Sous ces conditions  $\lambda_b$  se déduit de (13.70) en prenant  $z = 0$  :

$$\lambda_b = \frac{R_b}{R} \quad (13.71)$$

où  $R$  est le taux actuel de formation d'étoiles dans la Galaxie et  $R_b$  le taux de naissance des systèmes binaires calculé au paragraphe précédent.

Pour calculer  $R$ , on suppose que le taux de formation d'étoiles à un instant donné est proportionnel à la masse de gaz disponible  $M_g(t)$  et on pose :

$$R(t) = k M_g(t) \quad (13.72)$$

Les étoiles les plus massives évoluant très vite, on peut considérer qu'elles restituent "instantanément" une fraction de leur masse au milieu interstellaire (Instantaneous Recycling Approximation). La masse éjectée s'écrit alors :

$$\frac{dM_e(t)}{dt} = x k M_g(t) \quad (13.73)$$

et le taux de variation de la masse de gaz disponible est :

$$\frac{dM_g(t)}{dt} = -R(t) + \frac{dM_e(t)}{dt} = -(1-x)k M_g(t) \quad (13.74)$$

Cette expression s'intègre pour donner :

$$M_g(t) = M_0 e^{-(1-x)kt} \quad (13.75)$$

où  $M_0$  est la masse initiale de gaz.

L'équation précédente écrite à l'époque actuelle,

$$M_{HI} = M_0 e^{-(1-x)kT}$$

où  $T$  est l'âge de la Galaxie et  $M_{HI}$  la masse actuelle de gaz, permet d'obtenir le paramètre  $k$  :

$$k = \frac{1}{T(1-x)} \ln\left(\frac{M_o}{M_{HI}}\right) \quad (13.76)$$

A  $T$ , l'expression (13.72) s'écrit

$$R = kM_{HI} \quad (13.77)$$

En remplaçant  $k$  par son expression (13.76) dans l'équation précédente (13.77) et en prenant  $T = 15$  Gan,  $x = 0.1$ ,  $\frac{M_{HI}}{M_0} = 8\%$  et  $M_{HI} = 6.5 \text{ GM}_\odot$ , on estime le taux de formation stellaire dans la Galaxie à  $R = 1.2 \text{ M}_\odot \text{ an}^{-1}$ . Et d'après (13.71) on en déduit  $\lambda_b = 1.4 \times 10^{-5} \text{ M}_\odot^{-1}$ .

Une paire d'étoiles à neutrons est formée avec un jeu de paramètres orbitaux qui déterminent son évolution et notamment le temps qu'elle mettra avant de fusionner. Si  $P_\tau(\tau)$  est la probabilité de former un système avec un temps de coalescence  $\tau$ ,  $P(z)$  s'en déduit par un simple changement de variable :

$$P_z(z) = P_\tau(\tau) \frac{d\tau}{dz} \quad (13.78)$$

D'après de Freitas Pacheco (1997) [27] on a une probabilité de la forme :

$$P_\tau(\tau) = \frac{B}{\tau} \quad (13.79)$$

En supposant que  $\tau$  prend ses valeurs dans l'intervalle  $0.1 - 20$  Gan, la constante de normalisation est  $B = \frac{1}{\ln 200} = 0.19$ . La fonction  $P_\tau(\tau)$  est compatible avec les observations qui montrent une croissance logarithmique du nombre cumulé de systèmes doubles d'étoiles à neutrons en fonction du taux de coalescence. Pour cette étude, on utilise plutôt que  $\tau$  la variable  $t = \tau - t_o$  où  $t_o = 0.1 \text{ Gan}$  est le temps de coalescence minimal. On écrit alors (13.79) sous la forme :

$$P_t(t) = \frac{B}{t_o + t} \quad (13.80)$$

et la relation (13.78) devient :

$$P_z(z) = P_t(t) \frac{dt}{dz} \quad (13.81)$$

Avec

$$\frac{dt'}{dz'} = \frac{1}{H_o} \frac{1}{(1+z')E(z')} \quad (13.82)$$

on obtient

$$P_z(z') = \frac{B}{H_o(t_o + t'(z'))} \frac{1}{(1+z')E(z')} \quad (13.83)$$

où

$$H_o t'(z') = \int_z^{z'} \frac{dz''}{(1+z'')E(z'')} \quad (13.84)$$

En introduisant les notations

$$\bar{P}(z) = \frac{P(z)}{B} \quad (13.85)$$

et

$$F(z) = \int_z^{z_{\text{sup}}} R_c(z' - z) \bar{P}(z') dz' \quad (13.86)$$

(13.69) devient

$$dR(z) = \lambda_b B F(z) \frac{dV}{dz} dz \quad (13.87)$$

### 13.3.3 Densité spectrale d'une source

Considérons un système simple de deux étoiles ponctuelles de masses  $m_1$  et  $m_2$ , en orbite circulaire autour du centre de masse du système. Dans l'approximation quadripolaire, le taux d'énergie rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles est :

$$\frac{dE_{gw}}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M(m_1 m_2)^2}{a^5} \quad (13.88)$$

où  $M = m_1 + m_2$ .

Le paramètre  $a$  est la distance entre les sources, liée à la vitesse angulaire orbitale  $\Omega$  par la 3<sup>e</sup> loi de Kepler :

$$a = \left( \frac{GM}{\Omega^2} \right)^{1/3} \quad (13.89)$$

La densité spectrale d'énergie se déduit de (13.88) par la relation :

$$\frac{dE_{gw}}{d\nu} = \frac{dE_{gw}}{dt} \frac{dt}{d\nu} \quad (13.90)$$

où  $\nu = \frac{\Omega}{\pi}$  est la fréquence gravitationnelle.

A partir de (13.89) et de l'expression de l'énergie du système :

$$E = -\frac{1}{2} \frac{Gm_1m_2}{a} \quad (13.91)$$

on obtient :

$$\frac{d\nu/dt}{\nu} = \frac{-3}{2} \frac{da/dt}{a} = \frac{3}{2} \frac{dE/dt}{E} \quad (13.92)$$

et on en déduit :

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{96}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{M(m_1m_2)}{a^4} \quad (13.93)$$

En utilisant cette relation et (13.88) dans (13.90) et en remplaçant  $a$  par son expression (13.89), on obtient l'expression de la densité spectrale d'énergie :

$$\frac{dE_{gw}}{d\nu} = \frac{(G\pi)^{2/3}}{3} \frac{m_1m_2}{M^{1/3}} \nu^{-1/3} = K_b \nu^{-1/3} \quad (13.94)$$

avec  $m_1 = m_2 = 1.4 M_\odot$ ,  $K_b = 5.2 \times 10^{50}$  cgs.

### 13.3.4 Fond de Rayonnement Stochastique

La contribution au fond stochastique est calculée comme précédemment, à partir du spectre d'énergie d'une source individuelle et du taux de coalescence.

La densité spectrale de flux s'écrit :

$$F_{\nu_o} = K_b B \lambda_b \left( \frac{c}{H_o} \right) \nu_o^{-1/3} \int_0^{z_{\text{sup}}} \frac{F(z)}{(1+z)^{4/3} E(\Omega_i, z)} dz \quad (13.95)$$

et le paramètre de densité produit par l'ensemble des systèmes doubles d'étoiles à neutrons depuis le début de la formation stellaire devient :

$$\Omega_{gw} = 10^{-10} \nu_o^{2/3} \int_0^{z_{\text{sup}}} \frac{F(z)}{(1+z)^{4/3} E(\Omega_i, z)} dz \quad (13.96)$$

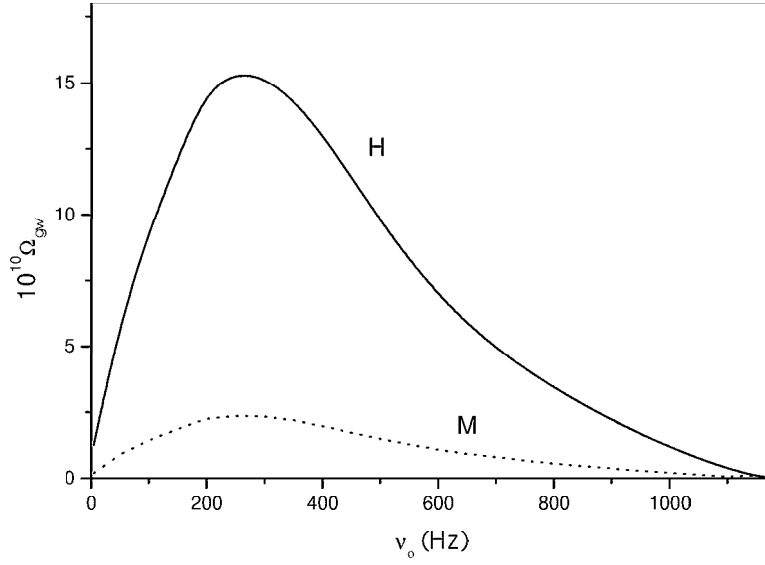


FIG. 13.15: spectre de  $\Omega_{gw}$  produit par la population cosmologique des systèmes doubles d'étoiles à neutrons. Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. (pointillés) et de Hopkins et al. (trait plein)

où  $z_{\text{sup}}$  est donné par (13.24) avec  $\nu_{\text{sup}} = 1180$  Hz. La valeur supérieure de la fréquence est atteinte lorsque les deux étoiles commencent à fusionner, c'est à dire lorsque la distance entre leurs centres respectifs est égale à deux fois le rayon typique d'une étoile à neutrons. La figure (13.15) représente le paramètre de densité d'énergie en fonction de la fréquence mesurée dans le repère de l'observateur. Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. (1998) [78] et de Hopkins et al. (2001) [54].

$\Omega_{gw}$  atteint  $2.4 \times 10^{-10}$  (M) et  $1.5 \times 10^{-9}$  (H) autour de 250 Hz. L'amplitude du signal est assez élevée malgré le faible nombre de sources puisque la coalescence d'un système binaire est un événement très énergétique.

## 13.4 Bilan des résultats

De façon à en faciliter la comparaison, nous avons reporté sur une même figure les spectres des différentes contributions calculées précédemment, dans le cas le plus optimiste avec le taux de formation stellaire de Hopkins et al. (2001) [54] et les fréquences de coupures les plus élevées (modèle H1, fi-

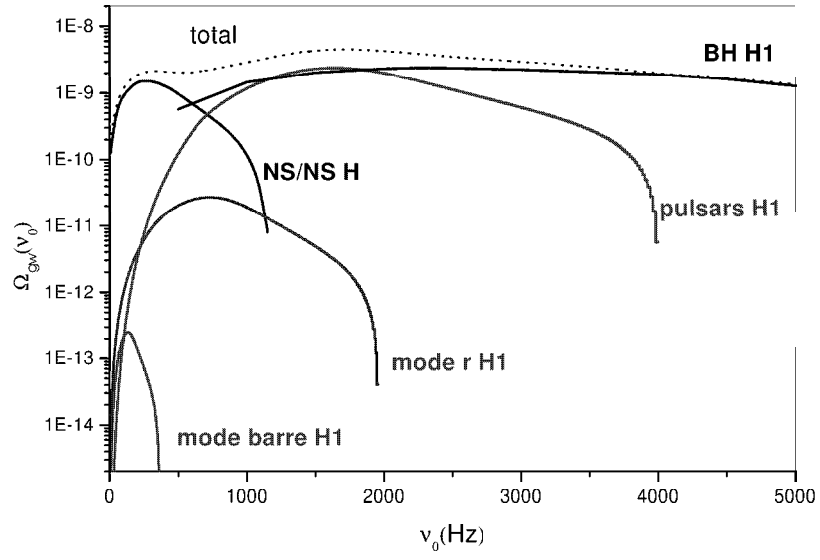


FIG. 13.16: les différentes contributions d'origine astrophysique dans le cas le plus optimiste (taux de formation stellaire de Hopkins et al. et fréquences de coupure élevées), et leur somme.



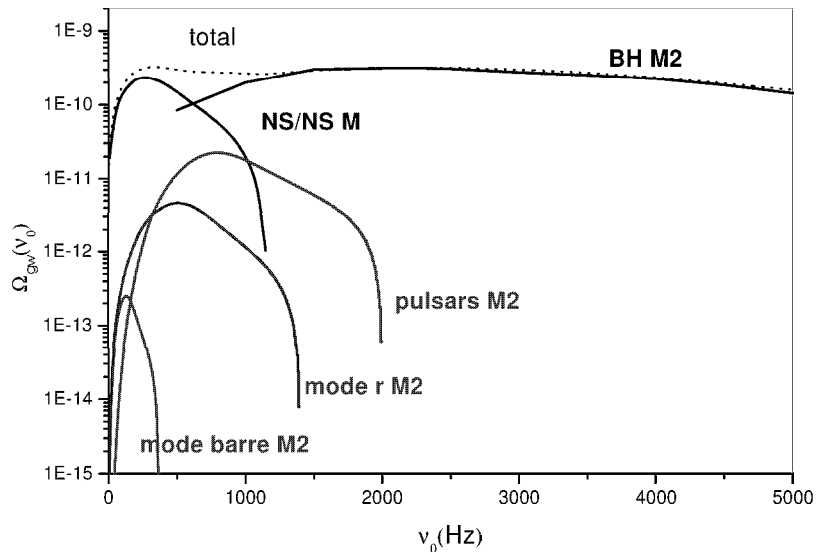


FIG. 13.17: les différentes contributions d'origine astrophysique dans le cas le plus pessimiste (taux de formation stellaire de Madau et al. et fréquences de coupure basses), et leur somme

gure 13.16), et dans le cas le plus pessimiste avec le taux de formation stellaire de Madau et al. (1999) [78] et les fréquences de coupure les plus faibles (modèle M2, figure 13.17). Nous avons aussi introduit la contribution des modes normaux des trous noirs au moment de leur formation calculée par Ferrari et al. (1999a) [37]. L’effondrement du coeur en trou noir après l’explosion en supernova d’étoiles de plus de  $40 M_{\odot}$  ne dépend que du moment angulaire  $J$  et de la masse  $M_c$  et peut être paramétré par la quantité  $a = \frac{Jc}{GM_c}$  (Stark et Piran, 1985 [108]). Ferrari et al. (1999a) [37] ont considéré les valeurs  $a = 0.79$  et  $a = 0.94$  et ont obtenu le signal le plus élevé avec  $a = 0.94$ . Par conséquent, notre modèle optimiste correspond à  $a = 0.79$  avec le taux de formation stellaire de Hopkins et al. (2001) [54] (modèle H1) et notre modèle pessimiste à  $a = 0.94$  avec le taux de formation stellaire de Madau et al. (1999) [78] (modèle M2).

Nous observons que :

- la contribution des pulsars est comparable à celle des trous noirs et domine même autour de sa fréquence optimale quand  $\nu_{\text{sup}} = 4$  kHz. Par contre, le signal émis par les trous noirs s’étend au delà de la fréquence de coupure des pulsars.
- la contribution des modes r cache complètement celle des modes barre
- la contribution des pulsars cache celle des modes r et barre sauf pour des fréquences inférieures à 80 Hz.
- les contributions des coalescences de binaires et des pulsars sont du même ordre de grandeur quand la fréquence de coupure est de 4 kHz mais dans des bandes de fréquence différentes (inférieures à 1 kHz pour les binaires) et elles n’entrent pas en compétition.

Nous avons calculé pour les deux modèles le signal total résultant de la somme des différentes contributions et tracé les courbes correspondantes sur les figures (13.16) et (13.17). Nous avons un fond continu dominé par la contribution des systèmes binaires aux basses fréquences et par celle des trous noirs aux fréquences élevées. Dans la zone intermédiaire, les contributions des pulsars et des modes r ou barre élève le niveau du signal. Le spectre de  $\Omega_{gw}$  présente un premier pic autour de 340 Hz, correspondant au maximum du spectre des systèmes binaires. La contribution des pulsars et des modes r et barre empêche ensuite le signal de descendre trop brutalement avant que la contribution des trous noirs ne devienne suffisante pour qu’il augmente à nouveau. Dans le cas M2, le signal est totalement dominé par le spectre des trous noirs à partir de 1.4 kHz environ et présente un second pic à 2.3 kHz. En revanche, pour le modèle H1, le spectre des pulsars atteignant un niveau comparable à celui des trous noirs, le second pic se situe plus près de

sa fréquence optimale, soit 1.8 kHz . La superposition des deux contributions permet alors d'atteindre  $\Omega_{gw} = 4.5 \times 10^{-9}$ .



# Chapitre 14

## Détection du fond de rayonnement Stochastique

### 14.1 Définitions

Le fond stochastique étant isotrope, il n'est pas possible de chercher une quelconque modulation du signal comme cela avait été proposé pour le fond de rayonnement galactique (GBG97 [42]). En fait, rien ne le distingue du bruit intrinsèque et le mieux que nous puissions faire avec un unique détecteur est de dire si le signal est égal ou au dessous du niveau du bruit. La stratégie optimale de détection consiste à corrélérer deux (ou plusieurs) détecteurs dont les bruits sont indépendants, de façon à extraire le signal commun. La détectabilité d'un fond de rayonnement stochastique de densité spectrale d'énergie  $\Omega_{gw}$  donnée est alors évaluée par le rapport signal à bruit calculé de la façon suivante (Allen, 1997 [1])

$$\frac{S}{N} = \left( \frac{9H_0^4}{8\pi^4} T \int_0^\infty \Gamma^2(f) \frac{\Omega_{gw}^2(f)}{f^6 S_n^1(f) S_n^2(f)} df \right)^{1/2} \quad (14.1)$$

où  $S_n^i(f)$  est la densité spectrale du bruit du  $i^{ieme}$  détecteur, T le temps d'intégration.

#### 14.1.1 “Overlap Reduction Function”

Dans l'expression (14.1), la quantité clé est la overlap reduction function (ou ORF) notée  $\Gamma(f)$ . Elle quantifie la réduction de sensibilité qui apparaît lorsque les détecteurs corrélés ne sont pas situés au même endroit et ne sont pas orientés dans la même direction. Pour un fond de rayonnement isotrope

et non polarisé, elle est définie par :

$$\Gamma(f) = \sum_{+, \times} \langle e^{i2\pi f \cdot \Omega \cdot \Delta r} F_1^A(r_1, \Omega, \psi) F_2^A(r_2, \Omega, \psi) \rangle_{\Omega, \psi} \quad (14.2)$$

où  $\Delta r = r_2 - r_1$  est la séparation entre les deux détecteurs,  $F_i^A$  la réponse impulsionnelle du  $i^{ème}$  détecteur et la notation  $\langle \rangle_{\Omega, \psi}$  représente la moyenne sur la direction de propagation  $\Omega = (\theta, \phi)$  et sur l'angle de polarisation  $\psi$ .

Souvent, on utilise la ORF normalisée :

$$\gamma(f) = \frac{1}{F} \sum_{+, \times} \langle e^{i2\pi f \cdot \Omega \cdot \Delta r} F_1^A(r_1, \Omega, \psi) F_2^A(r_2, \Omega, \psi) \rangle_{\Omega, \psi} \quad (14.3)$$

où le facteur de normalisation est donné par :

$$F = \sum_{+, \times} \langle F_1^A(r_1, \Omega, \psi) F_2^A(r_2, \Omega, \psi) \rangle_{\Omega, \psi} \quad (14.4)$$

Pour la corrélation entre deux interféromètres ou entre un interféromètre et une antenne résonante,  $F$  est égal à  $\frac{2}{5}$  (Maggiore, 2000 [79]).

Notons que pour deux détecteurs situés au même endroit et orientés dans la même direction,  $\gamma(f) = 1$ .

Avant de donner l'expression de  $\gamma(f)$  pour deux interféromètres quelconques, il convient d'introduire trois angles (Flanagan, 1993 [35]). Si on appelle  $\sigma_1$  (et  $\sigma_2$ ) l'angle entre la bissectrice des deux bras du premier (et du second) détecteur et l'arc de grand cercle joignant les deux détecteurs, on définit modulo  $90^\circ$  :

$$\delta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

qui décrit la rotation relative de la paire de détecteurs et

$$\Delta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

qui décrit la rotation moyenne de la paire de détecteurs par rapport à la ligne de visée.

Pour des interféromètres terrestres, on introduit aussi  $\beta$ , l'angle entre les deux détecteurs sous-tendu au centre de la Terre.

Le tableau (14.1) donne les angles  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\Delta$  et la séparation  $d$  entre les détecteurs pour les corrélations entre VIRGO et chacun des autres interféromètres terrestres ainsi que pour la paire LIGO LA/LIGO WA. Pour le détail du calcul de ces paramètres, se reporter à l'annexe A.

	d (km)	$\beta(^{\circ})$	$\delta(^{\circ})$	$\Delta(^{\circ})$
VIRGO/LIGOLA	7906	76.76	63.25	83.07
VIRGO/LIGOWA	8158	79.62	28.92	55.08
VIRGO/GEO	959	8.63	23.86	2.64
VIRGO/TAMA	8864	88.16	72.43	83.21
LIGOLAO/LIGOWA	3002	27.2	44.9	28.2

TAB. 14.1: paramètres de localisation et d'orientation des interféromètres terrestres

Connaissant  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\Delta$  et  $d$  on peut calculer la ORF pour une paire de détecteurs. D'après Flanagan (1993) [35]

$$\gamma(f) = \cos(4\delta)\Theta_1(\alpha, \beta) + \cos(4\Delta)\Theta_2(\alpha, \beta) \quad (14.5)$$

où

$$\begin{cases} \Theta_1(\alpha, \beta) = \cos^4(\frac{\beta}{2})g_1(\alpha) \\ \Theta_2(\alpha, \beta) = \cos^4(\frac{\beta}{2})g_2(\alpha) + g_3(\alpha) - \sin^4(\frac{\beta}{2})[g_2(\alpha) + g_1(\alpha)] \end{cases} \quad (14.6)$$

avec

$$\begin{cases} g_1(\alpha) = \frac{5}{16} \frac{1}{\alpha^5} [-9\alpha \cos \alpha - 6\alpha^3 \cos \alpha + 9 \sin \alpha + 3\alpha^2 \sin \alpha + \alpha^4 \sin \alpha] \\ g_2(\alpha) = \frac{5}{16} \frac{1}{\alpha^5} [45\alpha \cos \alpha + 6\alpha^3 \cos \alpha - 45 \sin \alpha + 9\alpha^2 \sin \alpha + 3\alpha^4 \sin \alpha] \\ g_3(\alpha) = \frac{5}{4} \frac{1}{\alpha^5} [15\alpha \cos \alpha - 4\alpha^3 \cos \alpha - 15 \sin \alpha + 9\alpha^2 \sin \alpha - \alpha^4 \sin \alpha] \end{cases} \quad (14.7)$$

et où

$$\alpha = \frac{2\pi f d}{c} \quad (14.8)$$

$f$  étant la fréquence gravitationnelle et  $d$  la distance entre les deux interféromètres.

Les figures (14.1) à (14.5) montrent la ORF pour les corrélations entre VIRGO et chacun des autres interféromètres terrestres ainsi que pour la paire LIGO LA/LIGO WA.

Les fonctions  $g_i(\alpha)$  étant des combinaisons linéaires des fonctions sphériques de Bessel  $j_0$ ,  $j_1$  et  $j_2$ ,  $\gamma(f)$  a un comportement oscillatoire de période  $\frac{c}{d}$ .

Notons que la ORF reste constante jusqu'à 100 Hz pour VIRGO/GEO alors qu'elle est pratiquement nulle pour les autres paires d'interféromètres. Cet effet est dû à la relative proximité des deux interféromètres.

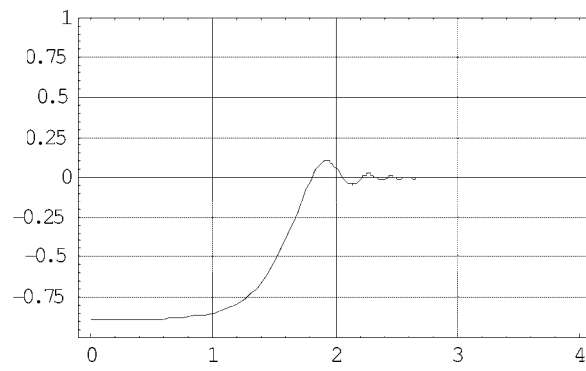


FIG. 14.1: LIGO/LIGO

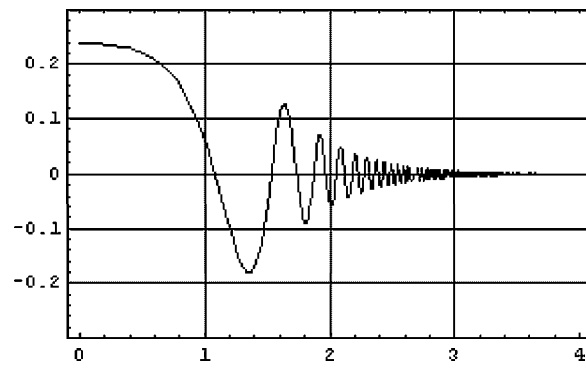


FIG. 14.2: VIRGO/LIGO LA

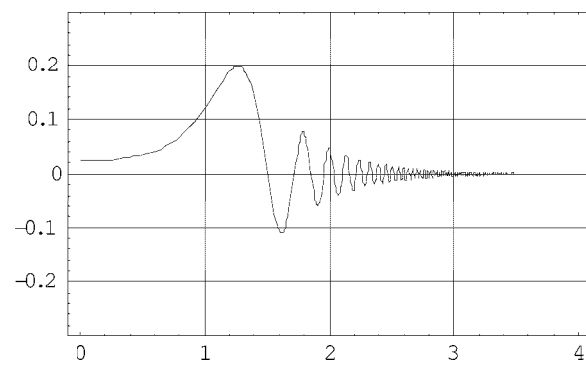


FIG. 14.3: VIRGO/LIGO WA



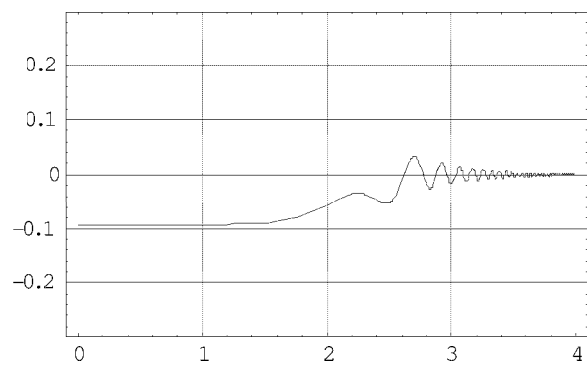


FIG. 14.4: VIRGO/GEO

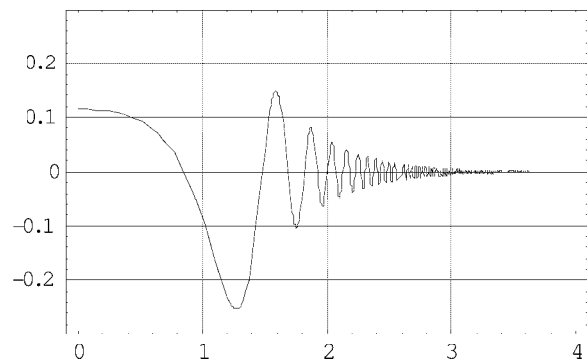


FIG. 14.5: VIRGO/TAMA

### 14.1.2 Densité spectrale du bruit

Dans l'expression (14.1) intervient la densité spectrale du bruit des détecteurs. Pour nos calculs, nous avons ajusté les courbes de bruits des interféromètres terrestres de la première génération par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_n^{Virgo}(f) = 10^{-16.40-5.18x+1.33x^2-0.086x^3} \\ h_n^{Geo}(f) = 10^{1377.63-3726.47x+4102.31x^2-2387.86x^3+774.68x^4-132.79x^5+9.40x^6} \\ h_n^{Tama}(f) = 10^{4.45-18.26x+3.98x^2-0.22x^3} \\ h_n^{LigoI}(f) = 10^{61.95-138.55x+88.89x^2-28.05x^3+4.39x^4-0.27x^5} \end{array} \right. \quad (14.9)$$

où  $h_n = \sqrt{S_n}$  et  $x = \log(f)$  avec  $f$  en  $Hz$ .

L'ajustement de LIGO II est donné par Owen et al. (1998) [91]

$$h_n^{LigoII}(f) = 8.5 \times 10^{-25} [2(\frac{112}{f(Hz)})^{4.5} + 4.5(1 + (\frac{f}{112(Hz)})^2)]^{0.5}$$

La figure (14.6) illustre les ajustements précédents :

## 14.2 Détectabilité du Fond Stochastique Astrophysique

Au chapitre précédent, nous avons calculé le spectre de  $\Omega_{gw}$  résultant de la somme des contributions de différentes sources astrophysiques (pulsars, modes barre et r, systèmes doubles d'étoiles à neutrons, trous noirs). Nous nous intéressons maintenant à la détectabilité de ce signal par la corrélation de deux détecteurs. Les tableaux 14.2 (et 14.3) donnent le rapport signal à bruit (formule 14.1) dans le cas d'une corrélation entre deux interféromètres de la première génération (deuxième génération) pour les modèles H1(optimiste) et M2 (pessimiste) considérés au chapitre 13. Ces valeurs ont été calculées avec un temps d'intégration  $T = 1$  an. Pour d'autres valeurs  $T'$ , le rapport signal à bruit devient :

$$\frac{S'}{N} = \frac{S}{N} \times (\frac{T'}{1 \text{ an}})^{0.5} \quad (14.10)$$

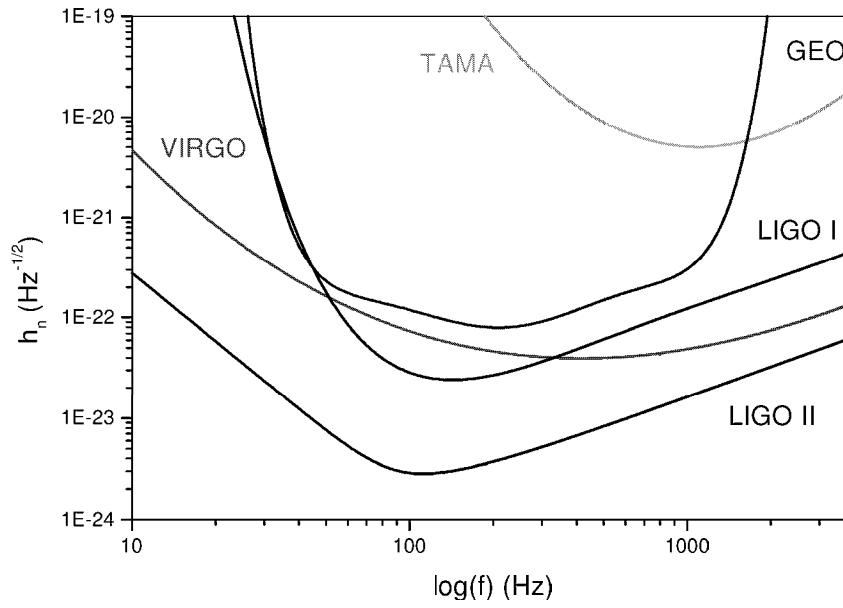


FIG. 14.6: ajustements des courbes de sensibilité des interféromètres terrestres

corrélation	modèle H1	modèle M2
VIRGO/LIGOLA I	$2.80 \times 10^{-4}$	$4.25 \times 10^{-5}$
VIRGO/LIGOWA I	$2.27 \times 10^{-4}$	$3.44 \times 10^{-5}$
VIRGO/GEO	$1.21 \times 10^{-4}$	$1.84 \times 10^{-5}$
VIRGO/TAMA	$2.61 \times 10^{-8}$	$3.95 \times 10^{-9}$
LIGOLA /LIGOWA (I)	$9.27 \times 10^{-4}$	$1.40 \times 10^{-4}$

TAB. 14.2: rapport signal à bruit optimal et minimal pour différentes paires de détecteurs de la première génération

corrélation	modèle H1	modèle M2
VIRGO/LIGOLA II	$1.18 \times 10^{-2}$	$1.80 \times 10^{-3}$
VIRGO/LIGOWA II	$1.01 \times 10^{-2}$	$1.54 \times 10^{-3}$
LIGOLA /LIGOWA (II)	<b>3.17</b>	0.48

TAB. 14.3: rapport signal à bruit optimal et minimal pour des corrélations avec un interféromètre avancé comme LIGO II

Les interféromètres de la première génération ne devraient pas permettre de détecter le fond gravitationnel astrophysique H1 ou M2 mais ce serait possible avec des interféromètres de la seconde génération. La sensibilité de LIGO II étant supérieure à celle de LIGO I d'environ un ordre de grandeur au dessus de 100 Hz et s'étendant jusqu'à des fréquences beaucoup plus basses permet d'améliorer le rapport signal à bruit de plus de deux ordres de grandeur. Il atteint 0.5 dans le cas le plus pessimiste et 3 dans le cas le plus optimiste. Une stratégie qui pourrait être prometteuse dans un proche avenir consiste à corréler un interféromètre avec une antenne résonante localisée au même endroit, permettant ainsi de s'affranchir de la réduction de sensibilité due à la ORF (Regimbau et de Freitas Pacheco, 2001b [100]). Les progrès réalisés sur le refroidissement des sphères (ou icosaèdres tronqués) permettraient d'atteindre des sensibilités de l'ordre de  $10^{-25} - 10^{-24} \text{ Hz}^{-1/2}$  autour des fréquences des modes principaux (Coccia et al., 1996 [22]) et des largeurs de bandes d'environ 2 kHz (Cerdonio et al., 2000 [17]).

# Chapitre 15

## Conclusions et Perspectives

### 15.1 Conclusions

L'objectif premier de cette thèse était d'étudier les propriétés statistiques de la population "réelle" des pulsars de la Galaxie et d'en déduire la détectabilité de son rayonnement gravitationnel par les antennes interférométriques comme VIRGO, actuellement en développement. De façon à retrouver la population "cachée" à partir des données sur les pulsars observés, nous avons développé un code numérique, basé sur des techniques de Monte Carlo, qui prend en compte de façon très précise les effets de sélection spécifiques à chaque radiotélescope. Il est surprenant de voir qu'avec des hypothèses de départ assez simples comme le modèle de freinage dipolaire magnétique et un nombre de paramètres relativement réduit, nous avons réussi à reproduire de façon satisfaisante la distribution de la période et obtenu un bon ajustement de l'ensemble des autres distributions. Au fur et à mesure de son développement, ce code numérique qui ne devait être au départ qu'un "outil" pour calculer la contribution des pulsars à l'émission gravitationnelle, s'est révélé riche en informations astrophysiques sur ces objets.

Concernant l'origine et l'évolution des pulsars, nous avons obtenu les résultats suivants :

- un pulsar naît tout les 170 ans dans la Galaxie. Cette valeur est en accord avec le taux de supernovae estimé à 1/150 ans par Clark et Caswell (1976) [21].
- la durée de vie des pulsars est en moyenne de 25 millions d'années
- en reliant simplement la population des paires NS/NS à celle des pulsars normaux via l'étoile à neutrons la plus jeune nous avons estimé le taux de naissance des systèmes binaires d'étoiles à neutrons de la Galaxie à  $1.7 \times 10^{-5} \text{ an}^{-1}$ , en accord avec d'autres études récentes (par exemple

Kalogera et al., 2000 [58]). Notre méthode présente l'avantage d'utiliser la population de pulsars dont l'échantillon observé est le plus important et dont les propriétés sont les mieux connues. Nous en avons déduit le taux de coalescence extragalactique jusqu'à des redshifts  $z = 5$ .

- les pulsars ne naissent pas en majorité comme des rotateurs rapides. La période initiale n'a pas une valeur unique mais suit une distribution normale de moyenne  $\langle P_0 \rangle = 290$  ms, en accord avec les synthèses de populations de Bhattachaya et al. (1992) [10]. Notre modèle apporte cependant une amélioration par rapport aux études antérieures puisque la dispersion relativement élevée de la distribution ( $\sigma_{P_0} = 100$  ms) permet de rendre compte des pulsars rapides comme celui du Crabe. Parmi les objets simulés, 60 ont une période inférieure à 80 ms ce qui est compatible avec les observations des pulsars les plus jeunes.

Les simulations numériques se sont révélées particulièrement intéressantes pour l'étude du champ magnétique :

- le champ magnétique initial non plus n'est pas fixe mais suit une distribution log-normale de moyenne  $\langle \log B \rangle = 13.4$ , soit un ordre de grandeur supérieur à celle observée. Les valeurs de  $B$  s'étendent entre  $\sim 10^{10} - 10^{16}$  G et 23% des objets ont un champ magnétique supérieur à  $10^{14}$  G. Ce résultat qui nous aurait surpris il y a quelques années appuie la thèse de l'existence des magnétars, des étoiles à neutrons avec un champ magnétique exceptionnel. Nous avons vérifié que les données sur les AXP et les SGR, soupçonnés d'être des magnétars, sont bien compatibles avec les propriétés statistiques de cette population. Le mécanisme physique capable de générer des champs aussi intenses reste cependant à expliquer même si plusieurs possibilités ont été avancées comme le phénomène de dynamo (Thompson et Duncan, 1993 [116]).
- le champ magnétique ne subit pas de dissipation notable pendant la durée de vie des pulsars en accord avec les synthèses de populations de Battacharya et al. (1992) [10] ou de Lorimer et al. (1993) [70]. Nous avons montré pour la première fois que le diagramme  $P\dot{P} - t_s$  peut être interprété uniquement par la dispersion des valeurs initiales de la période et du champ magnétique comme l'avaient soupçonné Lyne, Ritching et Smith (1975) [77]

Cette étude statistique des pulsars s'intègre dans le contexte actuel des projets de détection des ondes gravitationnelles. Il est important de développer dès maintenant des modèles astrophysiques précis des différentes sources possibles pour optimiser la recherche d'une part et se préparer à identifier et interpréter en termes d'astrophysique les futures détections d'autre part.

A partir des propriétés de la population totale déduites des simulations numériques, nous avons calculé la contribution des pulsars galactiques à l'émission gravitationnelle. Dans la mesure où les distributions de la période et de la distance sont connues, notre estimation du signal est beaucoup plus réaliste que celles déduites jusque là de modèles analytiques.

Dans le cadre de la recherche individuelle nous avons obtenu les résultats suivants :

- seuls les pulsars les plus proches et surtout les plus rapides émettent un rayonnement suffisamment élevé pour être détecté. Avec des interféromètres de la première génération comme VIRGO ou LIGO I on peut attendre en moyenne 3 ou 15 détections avec des ellipticités de  $10^{-6}$  ou  $10^{-5}$ . La sensibilité de LIGO II permettrait d'augmenter le nombre de détections jusqu'à 15 si  $\varepsilon = 10^{-6}$  et jusqu'à 90 si  $\varepsilon = 10^{-5}$ .
- en terme d'ellipticité,  $10^{-6}$  représente ainsi le seuil de détectabilité de VIRGO et LIGO I. Mais déjà avec des interféromètres de la deuxième génération comme LIGO II nous pourrions atteindre des ellipticités de  $10^{-7}$ . Ce résultat est très intéressant d'un point de vue astrophysique : même en cas de non détection au départ, il sera toujours possible de déduire une limite supérieure à l'ellipticité. Et les progrès technologiques réalisés sur les détecteurs, permettront peu à peu de se rapprocher de la valeur réelle.

A partir de l'étude statistique de la sous population détectable nous avons défini la région la plus probable dans l'espace des paramètres.

- nos résultats ont confirmé qu'une détection a le plus de chance de se produire dans le disque et vers le centre de la Galaxie.
- la fréquence la plus probable dépend beaucoup de la sensibilité du détecteur. La distribution "détectable" est le résultat d'une convolution entre la distribution "potentiellement détectable" et la courbe de sensibilité. Si l'ellipticité moyenne est de  $10^{-6}$ , le maximum se situe autour de 430 Hz pour les interféromètres de la première génération et descend autour de 180 Hz pour LIGO II. Nos simulations ont aussi montré que la bande de fréquence optimale se rétrécit considérablement avec le perfectionnement des interféromètres, ce qui est très encourageant pour optimiser les recherches dans l'avenir. Finalement, nous avons obtenu que l'on peut garder 90% de la probabilité maximale de détection en explorant moins de 1% de l'espace des paramètres. Ce n'est malheureusement pas suffisant pour effectuer une recherche aveugle au maximum de la sensibilité mais on pourrait envisager d'optimiser les méthodes hiérarchiques pour les paramètres les plus probables.

Dans le cadre d’une recherche quadratique, nous avons montré que :

- la population galactique ne produit pas un véritable fond de rayonnement dans la mesure où le signal total est complètement dominé par les contributions de quelques objets rapides et proches
- il n’existe donc pas non plus de courbe de modulation “typique”, ce qui rend impossible la construction de “templates” fiables.

Les propriétés statistiques des pulsars de la Galaxie généralisées à la population extra-galactique nous ont permis de calculer le fond de rayonnement stochastique créée par différentes sources astrophysiques telles que les pulsars en rotation, les modes  $r$  et barre chez les jeunes et rapides étoiles à neutrons et les systèmes binaires d’étoiles à neutrons.

Les prévisions sont les suivantes :

- les contributions des pulsars (pour une ellipticité de  $10^{-6}$  et une fréquence de coupure de 4 kHz), des trous noirs et des binaires NS/NS sont comparables (de l’ordre de  $10^{-9} - 10^{-10}$  selon le taux de formation stellaire considéré). Cependant, ces trois contributions pourraient être détectées séparément puisqu’il existe des fenêtres où elles n’entrent pas en compétition. Le spectre des pulsars domine autour de sa fréquence optimale de 1.5 kHz, celui des binaires aux fréquences plus basses (autour de 250 Hz) alors que le signal émis par les trous noirs s’étend au delà des fréquences de coupure des autres contributions.
- le paramètre de densité  $\Omega_{gw}$  des modes  $r$  et barre est faible par rapport aux autres contributions, ne dépassant pas respectivement  $10^{-12} - 10^{-11}$  et  $10^{-13} - 10^{-12}$ . Ce résultat tient compte du fait que les étoiles à neutrons ne naissent pas en majorité comme des rotateurs rapides. Seule une faible fraction d’étoiles traverse la fenêtre d’instabilité, réduisant de quatre ordre de grandeur les estimations de Ferrari et al. (1999b) [38] sur les modes  $r$ .
- le fond résultant de la superposition des différentes contributions astrophysiques a une amplitude de l’ordre de  $10^{-9} - 10^{-10}$  sur une large bande de fréquence entre 0 – 5 kHz ce qui rendrait possible sa détection par la corrélation d’interféromètres de la deuxième génération comme LIGO II.

## 15.2 Perspectives

Le code numérique que nous avons développé pour étudier le rayonnement gravitationnel s’est révélé aussi très utile pour l’étude du champ magnétique.



Il est pourtant loin d'avoir été complètement exploité et nous envisageons d'étudier plus en détail les problèmes suivants :

- le mécanisme à l'origine de la vitesse initiale des pulsars est encore mal connu ainsi que ses conséquences sur le taux de binarité. L'équipe SAES (Stade Avancé de l'Evolution Stellaire) dont nous faisons partie projette d'étudier cet aspect dans un proche avenir et notre code numérique pourrait être utilisé pour tester les différents modèles. Les résultats de ce travail seraient d'un intérêt majeur dans le cadre de la détection des ondes gravitationnelles et en particulier pour le projet LISA puisque nous pourrions en déduire les taux de formation (et/ou de coalescence) des systèmes binaires compacts. Nous aurions aussi accès à la population des pulsars millisecondes réaccélérés dans des systèmes binaires de faibles masses.
- notre code numérique peut être utilisé pour tester de nouveaux modèles d'évolution. Par exemple, Allen et Horvath ont récemment proposé une alternative à la notion de magnétars suggérant que le champ magnétique pouvait avoir des valeurs beaucoup plus faibles que celles déduites du modèle canonique dipolaire. Leur étude s'inspire du modèle de Goldreich et Julian (1969) [44] selon lequel l'étoile peut subir une perte de moment angulaire en accélérant un flux de particules relativistes.

L'Aventure des ondes gravitationnelles commence et les étoiles à neutrons semblent destinées à y jouer un rôle important.

Nous avons étudié différents mécanismes d'émission comme la rotation, les instabilités  $r$  ou barre et il serait intéressant de considérer maintenant les modes de pulsation. Un mécanisme prometteur concerne le micro-collaps consécutif à une éventuelle transition de phase hadron/quark au coeur de l'étoile (de Freitas Pacheco, 1999). L'énergie libérée pourrait atteindre  $10^{50}$  erg, parmi lesquels 10% seraient émis sous forme d'ondes gravitationnelles via l'excitation des modes non radiaux de pulsation. La détection de ce signal représenterait un outils unique pour sonder la matière nucléaire et poser des contraintes sur les différentes équations d'états.

Nous avons calculé des contributions astrophysiques au fond de rayonnement stochastique ( pulsars en rotation, les modes  $r$  et barre, coalescence de paires NS/NS) et envisagé leur détection en corrélant différents détecteurs. Il reste maintenant à :

- simuler ces contributions parmi le bruit des interféromètres de façon à élaborer et optimiser les algorithmes de détection
- rechercher des stratégies de détection adaptées. Une solution qui nous semble prometteuse est la corrélation entre un interféromètre et une

antenne résonante localisée au même endroit

- délimiter les fenêtres où rechercher le rayonnement fossile.

La détection des ondes gravitationnelles s'inscrit dans le cadre d'une nouvelle astronomie dont font aussi partie les détecteurs de neutrinos, de rayons gamma ou X ... Dans l'avenir nous serons amenés à travailler de concert pour comparer et interpréter les éventuelles détections et les équipes de travail devront être polyvalentes. Les physiciens/astrophysiciens auront les rôles de Champollion et les pulsars, observables aussi bien dans le domaine des ondes gravitationnelles qu'en radio, X ou gamma, pourraient bien être leur pierre de Rosette.

# Bibliographie

- [1] Allen B., 1997, dans *Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation*, eds. J.-A. Marck, J.-P. Lasota, Cambridge University Press, p.373
- [2] Allen M.P., Horvath J.E., 1997, Glitches, torque evolution and the dynamics of young pulsars, *MNRAS* 287, 615
- [3] Alpar M.A., Pines D., 1993, dans *Isolated Pulsars*, eds. K.A. Van Riper, R.I. Epstein, C. Ho, Cambridge University Press, p.17
- [4] Andersson N., 1998, A New Class of Unstable Modes of Rotating Relativistic Stars, *ApJ*, 502, 708
- [5] Baade W., Zwicky F., 1934, *Phys.Rev.*, 45, 138
- [6] Backer D.C., Kulkarni S.R., Heiles C., Davis M.M., Goss W.M., 1982, A millisecond pulsar, *Nature*, 300, 615
- [7] Bailes M., 1989, The origin of pulsar velocities and the velocity-magnetic moment correlation, *ApJ*, 342, 917
- [8] Baring M.G., Harding A.K., 1998, Radio-Quiet Pulsars with Ultrastrong Magnetic Fields, *ApJ*, 507, L55
- [9] Bayms G., Pethick C., Pines D., 1969, Electrical Conductivity of Neutron Star Matter, *Nature*, 224, 674
- [10] Bhattacharya D., Wijers R.A.M.J., Hartman J.W., Verbunt F., 1992, On the decay of the magnetic fields of single radio pulsars, *A&A* 254, 198
- [11] Biggs J.D., 1990, Meridional Compression of Radio Pulsar Beams, *MNRAS* 245, 514
- [12] Bildsten L., 1998, Gravitational Radiation and Rotation of Accreting Neutron Stars, *ApJ*, 501, 89
- [13] Bonazzola S., Gourgoulhon E., 1996, Gravitational waves from pulsars : emission by the magnetic-field-induced distortion, *A&A*, 312, 675
- [14] Calzetti D., 1997, *AJ*, 113,162

- [15] Canuto V., 1970, Electrical Conductivity and Conductive Opacity of a Relativistic Electron Gas, *ApJ*, 159, 641
- [16] Casini H., Montemayor R., 1998, Crust-Core Interactions and the Magnetic Dipole Orientation in Neutron Stars, *ApJ* 503, 374
- [17] Cerdonio M., Conti L., Lobo J.A., Ortolan A., Taffarelli T., Zendri J.P., 2000, Wideband dual sphere detector of gravitational waves, *PRL* (en presse), gr-qc/0011002
- [18] Chandrasekhar S., 1970, *PRL* 24, 611
- [19] Chandrasekhar S., 1969, *Ellipsoidal figures of equilibrium*, New Haven, Yale Univ. Press
- [20] Chevalier, R. A., Emmering, R. T., 1986, Are pulsars born as slow rotators?, *ApJ*, 304, 140
- [21] Clark, D. H., Caswell, J. L., 1976, A study of galactic supernova remnants, based on Molonglo-Parkes observational data, *MNRAS*, 174, 267
- [22] Coccia E., Fafone V., Frossati G., Haar E., Meisel M.W., 1996, *PRLA*, 219, 263
- [23] Colpi M, Geppert U., Page D., Period Clustering of the Anomalous X-Ray Pulsars and Magnetic Field Decay in Magnetars, 2000, *ApJ* 529, L29
- [24] Cordes, J. M., Ryan, M., Weisberg, J. M., Frail, D. A., Spangler, S. R., 1991, The Galactic distribution of free electrons, *Nature* 354, 121
- [25] de Araújo J.C.N., Miranda O.D., Aguiar O.D. 2000, Stochastic Background of Gravitational Waves, *PRD* 61, 124015
- [26] de Bernardis P. et al, 2000, A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation, *Nature* 404, 955
- [27] de Freitas Pacheco J.A., 1997, The NS-NS coalescence rate in galaxies and its significance to the VIRGO gravitational antenna, *AstroparticlePhysics*, 8, 21
- [28] de Freitas Pacheco J.A., Horvath J.E., 1997, Gravitational Wave Emission from Galactic Radio Pulsars, *PRD* 56, 859
- [29] de Freitas Pacheco J., Horvath J.E, Araujo J.C.N, Cattani M., 1993, The effects of QCD parameters on the quark core dimensions in compact stars, *MNRAS*, 260, 499
- [30] Duncan R.C, 1998, <http://solomon.as.utexas.edu/~duncan>
- [31] Duncan R.C, Thompson C., 1992, Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts, *ApJ*, 392, L9

- [32] Duncan R.C, Thompson C., 1993, Neutron star dynamos and the origins of pulsar magnetism, *ApJ*, 408, 194
- [33] Duffett-Smith P., 1979, *Practical astronomy with your calculator*, Cambridge University Press
- [34] Emmering, R. T., Chevalier R. A., 1989, The intrinsic luminosity and initial period of pulsars, *ApJ*, 345, 931
- [35] Flanagan E., 1993, Sensitivity of the Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory to a stochastic background, and its dependence on the detector orientations, *PRD*, 48, 6
- [36] Ferrari A., Ruffini R., 1969, Theoretical Implications of the Second Time Derivative of the Period of the Pulsar NP 0532, *ApJ*, 158, L71
- [37] Ferrari V., Matarrese S., Schneider R., 1999a, Gravitational wave background from a cosmological population of core-collapse supernovae, *MNRAS* 303, 247
- [38] Ferrari V., Matarrese S., Schneider R., 1999b, Stochastic background of gravitational waves generated by a cosmological population of young, rapidly rotating neutron stars, *MNRAS* 303, 258
- [39] Friedman J. L., Parker L., Ipser J.R., 1989, Implications of a half-millisecond pulsar, *PRL*, 62, 3015
- [40] Friedman J.L., Morsink S.M., 1998, Axial Instability of Rotating Relativistic Stars, *ApJ*, 502, 714
- [41] Friedman J.L., Schutz B.F., 1978, Secular Instability of Rotating Newtonian Stars, *ApJ* 222, 281
- [42] Giazotto A., Bonazzola S., Gourgoulhon E., 1997, Gravitational waves emitted by an ensemble of rotating neutron stars, *PRD* 55, 2015
- [43] Gold T., 1968, Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources, *Nature*, 218, 731
- [44] Goldreich P., Julian W.H., 1969, Pulsar Electrodynamics, *ApJ*, 157, 869
- [45] Goldreich P., Reisenegger A., 1992, Magnetic field decay in isolated neutron stars, *ApJ*, 395, 250
- [46] Gunn J.E., Ostriker J.P., 1969, On the Nature of Pulsars. I. Theory, *ApJ*, 157, 1395
- [47] Gunn J.E., Ostriker J.P., 1970, On the Nature of Pulsars. III. Analysis of Observations, *ApJ*, 160, 979
- [48] Hanany S. et al, 2000, MAXIMA-1 : A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on Angular Scales of  $10^{-5}^\circ$ , *ApJ*, 545, L5

- [49] Hansen B.M.S., Phinney E.S., 1997, The pulsar kick velocity distribution, *MNRAS*, 291, 569
- [50] Hartman J.W., Bhattacharya D., Wijers R., Verbunt F., 1997, A study of the evolution of radio pulsars through improved population synthesis, *A&A* 322, 477
- [51] Heyl J.S., Hernquist L., 1997, Powering Anomalous X-Ray Pulsars by Neutron Star Cooling, *ApJ*, 489, L67
- [52] Heyl J.S., Kulkarni S.R., 1998, How Common Are Magnetars? The Consequences of Magnetic Field Decay, *ApJ*, 506, L61
- [53] Hewish A., Bell S.J., Pilkington J.D.H., Scott P.F., Collins R.A., 1968, Observation of a rapidly pulsating radio source, *Nature*, 217, 709
- [54] Hopkins A.M., Connolly A.J., Haarsma D.B., Cram L.E., 2001, Towards a resolution of the discrepancy between different estimators of star formation rate, *ApJ* (en presse), astro-ph/0103253
- [55] Houser J.L., Centrella J.M., Smith S.C., 1994, Gravitational radiation from nonaxisymmetric instability in a rotating star, *PRL*, 72, 1314
- [56] Israel G.L., Covino S., Stella L., Campana S., Haberl F., Mereghetti S., 1999, Further Evidence that 1RXS J170849.0-400910 Is an Anomalous X-Ray Pulsar, *ApJ*, 518, L107
- [57] Jaranowski P., Królak A., Schutz B.F., 1998, Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars. I. The signal and its detection, gr-qc/9804014
- [58] Kalogera V., Lorimer D.R., 2000, An Upper Limit on the Coalescence Rate of Double Neutron-Star Binaries in the Galaxy, *ApJ*, 530, 890
- [59] Kouveliotou C., Fishman G.J., Meegan C.A., Paciesas W.S., van Paradijs J., Norris J.P., Preece R.D., Briggs M.S., Horack J.M., Pendleton G.H., Green D.A., 1994, The Rarity of Soft Gamma-Ray Repeaters Deduced from Reactivation of SGR :1806-20, *Nature*, 368, 125
- [60] Kouveliotou C., Dieters S., Strohmayer T., van Paradijs J., Fishman G.J., Meegan C.A., Hurley K., Kommers J., Smith I., Frail D., Murakami T., 1998, An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft gamma-ray repeater SGR 1806-20, *Nature*, 393, 235
- [61] Kouveliotou C., Strohmayer T., Hurley K., van Paradijs J., Finger M.H., Dieters S., Woods P., Thompson C., Duncan R.C., 1999, Discovery of a Magnetar Associated with the Soft Gamma Repeater SGR 1900+14, *ApJ*, 510, L115
- [62] Krauss J.D., 1966, *Radio Astronomy*, McGraw-Hill, New-York

- [63] Krauss L.M., 2001, Space, Time, and Matter : Cosmological Parameters 2001, astro-ph/0102305
- [64] Landau L., Lifshitz E., 1951, The Classical Theory of Fields (Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co)
- [65] Lai D., Rasio F.A., Shapiro S.L., 1993, Ellipsoidal figures of equilibrium - Compressible models, ApJS, 294, 474
- [66] Lai D., Shapiro S.L., 1995, Gravitational radiation from rapidly rotating nascent neutron stars, ApJ, 442, 259
- [67] Lindblom L., 2001, Neutron star pulsations and instabilities, astro-ph/0101136
- [68] Link B., Epstein R.I., 1997, Are We Seeing Magnetic Axis Reorientation in the Crab and VELA Pulsars ?, ApJ, 478, L91
- [69] Link B., Franco L.M., Epstein R.I., 1998, Starquake-induced Magnetic Field and Torque Evolution in Neutron Stars, ApJ, 508, 838
- [70] Lorimer D.R., Bailes M., Dewey R.J., Harrison P.A., 1993, Pulsar Statistics - the Birthrate and Initial Spin Periods of Radio Pulsars, MNRAS, 263, 403
- [71] Lorimer D.R., Yates J.A., Lyne A.G., Gould D.M., 1995, Multifrequency flux density measurements of 280 pulsars, MNRAS, 273, 411
- [72] Lyne, A. G., Anderson B., Salter M. J., 1982, The proper motions of 26 pulsars, MNRAS, 201, 503
- [73] Lyne A.G., Graham-Smith F., 1998, Pulsar Astronomy, Cambridge University Press, Cambridge
- [74] Lyne A.G., Lorimer, D.R., 1994, High Birth Velocities of Radio Pulsars, Nature, 369, 127
- [75] Lyne A.G., Manchester R.N., 1988, The shape of pulsar radio beams, MNRAS, 234, 477
- [76] Lyne A.G., Manchester R.N., Lorimer D.R., Bailes M., D'Amico N., Tauris T.M., Johnson S., Bell J.F., Nicastro L., 1998, The Parkes Southern Pulsar Survey - II. Final results and population analysis, MNRAS, 295, 743
- [77] Lyne A.G., Ritchings R.T., Smith F.G., 1975, The period derivatives of pulsars, MNRAS, 171, 579
- [78] Madau P., Pozzetti L., 1999, MNRAS, 312, 9
- [79] Maggiore M., 2000, Gravitational Wave Experiments and Early Universe Cosmology, Phys.Rep., 331, 283

- [80] Manchester R. N., Lyne A. G., D'Amico, N., Bailes, M., Johnston, S., Lorimer, D. R., Harrison, P., Nicastro, L., Bell, J. F., 1996, The Parkes southern pulsar survey - I. Observing and data analysis systems and initial results, MNRAS, 279, 1235
- [81] Manchester R.N., Taylor J.H., 1977, Pulsars , Freeman, San Francisco
- [82] Mereghetti S., 1995, A Spin-down Variation in the 6 Second X-Ray Pulsar 1E 1048.1-5937, ApJ, 455, 598
- [83] Mereghetti S., 1999, The Anomalous X-ray Pulsars, astro-ph/9911252
- [84] Mereghetti S., Stella L., 1995, The very low mass X-ray binary pulsars : A new class of sources ?, ApJ, 442, L17
- [85] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A., 1973, Gravitation, Freeman, San Francisco
- [86] Mukherjee S., Kembhavi A., 1997, Magnetic Field Decay in Single Radio Pulsars : A Statistical Study, ApJ, 489, 928
- [87] Narayan, R., 1987, The birthrate and initial spin period of single radio pulsars, ApJ, 319, 162
- [88] Narayan, R., Ostriker J.P., 1990, Pulsar Populations and their Evolution, ApJ, 352, 222
- [89] Narayan R., Vivekanand M., 1983, A new model for the emission geometry in PSR 0950+08, ApJ, 274, 771
- [90] Oosterbroek T., Parmar A.N., Mereghetti S., Israel G.L., 1998, The two-component X-ray spectrum of the 6.4 S pulsar 1E 1048.1-5937, A&A, 334, 925
- [91] Owen B.J., Lindblom L., Cutler C., Schutz B.F., Vecchio A., Andersson N., 1998, Gravitational waves from hot young rapidly rotating neutron stars, PRD, 58, 084020
- [92] Pacini F., 1967, Energy emission from a neutron star, Nature, 216, 567
- [93] Palomba C., 2000, Pulsars ellipticity revised, A&A, 354, 163
- [94] Perlmutter S., et al., 1999, Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae, ApJ, 517, 565
- [95] Phinney , Verbunt, 1991, Binary pulsars before spin-up and PSR 1820 - 11, MNRAS, 248, 21
- [96] Proszynski M., Przybycien D., 1985, dans Millisecond Pulsars, eds. S.P. Reynolds, D.R. Stinebring, NRAO, p151
- [97] Provost J., Berthomieu G., Rocca A., 1981, Low Frequency Oscillations of a Slowly Rotating Star - Quasi Toroidal Modes, A&A, 94, 126



- [98] Regimbau T., de Freitas Pacheco J.A., 2000, Gravitation wave emission from radio pulsars revisited, *A&A*, 359, 242
- [99] Regimbau T., de Freitas Pacheco J.A., 2001a, Population Synthesis of Pulsars : Magnetic Field Effects, *A&A* (en presse)
- [100] Regimbau T., de Freitas Pacheco J.A., 2001b, Cosmic Background of Gravitational Waves from Rotating Neutron Stars, *A&A* (en presse)
- [101] Ruderman M.A., Sutherland P.G., 1975, Theory of pulsars - Polar caps, sparks, and coherent micro wave radiation, *ApJ*, 196, 51
- [102] Ruphy S., Robin A.C., Epchtein N., Copet E., Bertin E., Fouquet P., Guglielmo F., 1996, New determination of the disc scale length and the radial cutoff in the anticenter with DENIS data, *A&A*, 313, L21
- [103] Sang, Y., Chanmugam, G., 1987, Ohmic decay of crustal neutron star magnetic fields, *ApJ*, 323, 61
- [104] Shemar, S. L., Lyne, A. G., 1996, Observations of pulsar glitches, *MNRAS*, 282, 677
- [105] Schmidt B., et al, 1998, *ApJ*, 507, 46
- [106] Schmidt M., 1985, dans *IAU Symp. 106, The Milk Way*, eds. par H. van Woerden, R.J. Allen, W.B. Burton, Reidel, Boston, Lancaster, p. 75
- [107] Srinivasan G., van den Heuvel E.P.J., 1982, Some constraints on the evolutionary history of the binary pulsar PSR 1913 + 16, *A&A*, 108, 143
- [108] Stark R. F., Piran T., 1985, Gravitational-wave emission from rotating gravitational collapse, *PRL*, 55, 891
- [109] Stergioulas N., Friedman J.L., 1998, Nonaxisymmetric Neutral Modes in Rotating Relativistic Stars, *ApJ*, 492, 301
- [110] Stokes G.H., Segelstein D.J., Taylor J.H., Dewey R.J., 1986, Results of two surveys for fast pulsars, *ApJ*, 311, 694
- [111] Stollman, G. M., 1997, Pulsar statistics, *A&A*, 178, 143
- [112] Tauris T.M., Manchester R.N., 1998, On the Evolution of Pulsar Beams, *MNRAS*, 298, 625
- [113] Taylor, J. H., Cordes, J. M., 1993, Pulsar distances and the galactic distribution of free electrons, *ApJ*, 411, 674
- [114] Taylor J.H., Manchester R.N., Lyne A.G., 1993, Catalog of 558 pulsars, *ApJS*, 88, 529 (réactualisé en 1995 sur [http ://www.pulsar.princeton.edu](http://www.pulsar.princeton.edu))

- [115] Thompson C., Duncan R.C., 1992, Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts, *MNRAS*, 275, 255
- [116] Thompson C., Duncan R.C., 1993, Neutron star dynamos and the origins of pulsar magnetism, *ApJ*, 408, 194
- [117] Thorne K.S., 1980, *Rev.Mod.Phys.*, 52, 299
- [118] Thorne K.S., 1987, dans *Three hundred of gravitation*, eds. par Hawking S.W., Israel W., Cambridge University Press, Cambridge, chap 9, p 310
- [119] Thorsett S.E, Chakrabarty D., 1999, *ApJ*, Neutron Star Mass Measurements. I. Radio Pulsars, 512, 288
- [120] Urpin V., Konenkov D., 1997, Magnetic and spin evolution of isolated neutron stars with the crustal magnetic field, *MNRAS*, 292, 167
- [121] Vasisht G., Gotthelf E.V., 1997, The Discovery of an Anomalous X-Ray Pulsar in the Supernova Remnant Kes 73, *ApJ*, 486, L129
- [122] Young M.D., Manchester R.N., Johnston S., 1999, *Nature*, 400, 848
- [123] Yungelson L., Potergies Zwart S. F., 1998, Formation and evolution of binary neutron stars, *A&A*, 332, 173

# Liste des tableaux

4.1	indice de freinage pour les 4 pulsars dont on a pu mesurer la dérivée seconde, dont ceux du Crabe PSR B0531+21 et de Vela PSR B0833-45 .	45
5.1	paramètres des antennes . . . . .	56
5.2	paramètres optimaux pour les modèles A et B . . . . .	58
5.3	période de rotation des pulsars normaux les plus jeunes par ordre croissant d'âge . . . . .	59
7.1	paramètres optimaux pour les modèles A et C . . . . .	80
7.2	propriétés des possibles magnétars . . . . .	84
9.1	comparaison entre les taux d'énergie radiative et gravitationnelle pour les pulsars normaux les plus rapides . . . . .	101
10.1	caractéristiques techniques des barres de l'IGEC . . . . .	105
11.1	nombre d'objets détectables pour différentes valeurs de l'ellipticité . . .	115
11.2	espace des paramètres optimal . . . . .	120
11.3	probabilité de détection en fonction du seuil de sensibilité pour une ellipticité de $10^{-6}$ . . . . .	126
13.1	. . . . .	147
13.2	. . . . .	155
13.3	propriétés des pulsars en systèmes NS/NS (période, champ magnétique, âge, période orbitale, masse du compagnon et excentricité de l'orbite) . . . .	158
14.1	paramètres de localisation et d'orientation des interféromètres terrestres .	171
14.2	rapport signal à bruit optimal et minimal pour différentes paires de détecteurs de la première génération . . . . .	175
14.3	rapport signal à bruit optimal et minimal pour des corrélations avec un interféromètre avancé comme LIGO II . . . . .	175
A.1	paramètres de localisation et d'orientation des interféromètres terrestres	197



# Table des figures

2.1	scénario d'évolution d'un pulsar isolé . . . . .	23
2.2	modèle du dipôle magnétique en rotation. Au centre l'étoile à neutrons d'où s'écartent les lignes de champ magnétique. . . . .	25
2.3	modèle du phare tournant . . . . .	25
2.4	scénarios d'évolution possibles pour un pulsar né en système binaire . . .	27
3.1	distribution dans le ciel de 491 pulsars normaux en coordonnées galac- tiques (l, b). La concentration dans le plan de la Galaxie est évidente . .	32
3.2	position de 491 pulsars normaux projetée dans le plan de la Galaxie. Les pulsars observés sont concentrés autour du Soleil (cercle) supposé distant de 8.5 kpc du centre galactique. . . . .	34
3.3	distance héliocentrique pour 491 pulsars normaux . . . . .	34
3.4	hauteur au plan galactique pour 491 pulsars normaux . . . . .	35
3.5	période pour 491 pulsars normaux . . . . .	36
3.6	dérivée de la période pour 491 pulsars normaux . . . . .	36
3.7	champ magnétique pour 491 pulsars normaux . . . . .	37
3.8	âge indicatif pour 491 pulsars normaux . . . . .	38
3.9	valeur moyenne de la luminosité radio estimée (en ordonnée) et observée (en abscisse) pour 491 pulsars normaux . . . . .	41
4.1	migration du dipôle magnétique par rapport à l'axe de rotation, consé- cutive à des tremblements d'étoiles successifs (d'après Link, Franco et Epstein, 1998) . . . . .	46
5.1	principe des simulations numériques de la population des pulsars de la Galaxie basé sur des techniques de Monte Carlo. La modélisation des facteurs de sélection permet d'isoler la population observable. . . . .	50
5.2	distribution de la période pour les modèles A et B (points) comparée à la distribution observée (colonnes). Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion calculée à partir de 500 expériences numériques . . . . .	60

5.3	distributions de la dérivée de la période pour les modèles A (points) et B (croix) comparées à la distribution observée (colonnes). Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion calculée à partir de 500 expériences numériques . . . . .	61
5.4	distributions de la distance pour les modèles A (points) et B (croix) comparées à la distribution observée (colonnes). La ligne continue représente la distribution simulée de la population totale. Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion calculée à partir de 500 expériences numériques . . . . .	63
7.1	distribution simulée dans le plan $P(dP/dt) - t_s$ pour un modèle sans dispersions initiales de la période et du champ magnétique (cercles), comparée aux observations (points) . . . . .	72
7.2	distribution simulée dans le plan $P(dP/dt)-t_s$ pour le modèle A avec dispersions initiales de la période et du champ magnétique (cercles), comparée aux observations (points). . . . .	75
7.3	distribution simulée dans le plan $P(dP/dt)-t_s$ pour le modèle C avec dispersions initiales de la période et du champ magnétique et dissipation du champ (cercles), comparée aux observations (points). . . . .	78
7.4	distributions de la période pour les modèles A (trait plein) et C (pointillés) comparées à la distribution observée (colonnes). . . . .	79
7.5	distributions de la dérivée de la période pour les modèles A (trait plein) et C (pointillés) comparées à la distribution observée (colonnes). . . . .	79
7.6	pour le modèle A, distributions du champ magnétique observable (trait plein) et réelle (pointillés), comparées à la distribution observée (colonnes). . . . .	82
7.7	pour le modèle C, distributions du champ magnétique observable (trait plein) et réelle (pointillés), comparées à la distribution observée (colonnes). . . . .	83
7.8	période moyenne en fonction de l'âge indicatif déduit des simulations (traits pleins) et pour les possibles magnétars (cercles) . . . . .	85
9.1	repère propre ( $\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ ) et repère extérieur à l'étoile ( $t, x, y, z$ ) dont l'axe $z$ coïncide avec l'axe de rotation . . . . .	96
10.1	variation des distances à l'origine (où se situe une particule test) d'un anneau de particules tests parallèle au plan d'onde . . . . .	104
10.2	interféromètre laser de type Michelson avec des cavités Fabry Perot . . .	105
10.3	courbe de sensibilité de VIRGO . . . . .	107
10.4	projet spatial LISA . . . . .	108
10.5	sensibilité de LISA avec quelques sources périodiques et des interféromètres terrestres comme VIRGO avec quelques sources impulsionnelles. .	110

11.1	distribution de l'amplitude gravitationnelle $h$ pour une ellipticité de $10^{-6}$ . Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion calculée à partir de 500 expériences numériques . . . . .	114
11.2	distributions de la fréquence gravitationnelle de la population détectable par VIRGO pour $\varepsilon = 10^{-5}$ (points, 15 objets) et $10^{-6}$ (colonnes, 3 objets)	117
11.3	distributions de la dérivée de la période de la population détectable par VIRGO pour $\varepsilon = 10^{-5}$ (points, 15 objets) et $10^{-6}$ (croix, 3 objets), comparées à la distribution de la population potentiellement détectable ( $P < 0.4s$ ) (colonnes) . . . . .	118
11.4	distribution de la latitude de la population détectable par VIRGO . . .	118
11.5	distribution de la longitude de la population détectable par VIRGO . . .	119
11.6	distribution du nombre de pulsars dominant le signal quadratique total .	121
11.7	distribution de la période de la population avec $P < 0.4s$ . . . . .	122
11.8	distribution de la distance de la population avec $P < 0.4s$ . . . . .	122
11.9	modulation de l'amplitude quadratique d'un pulsar de période $P = 1ms$ et situé à $d = 10$ kpc . . . . .	123
11.10	modulation de l'amplitude quadratique d'un pulsar de période $P = 5ms$ et situé à $d = 10$ kpc . . . . .	124
11.11	modulation de l'amplitude quadratique d'un pulsar de période $P = 1ms$ et situé à $d = 1$ kpc . . . . .	124
11.12	distribution de l'amplitude quadratique maximale pour une ellipticité de $10^{-6}$ et correspondant à 7000 expériences numériques . . . . .	125
13.1	distribution de $\log(\frac{\tau_o}{P_o^2})$ déduite des simulations numériques de Monte Carlo (modèle A). C'est une gaussienne de valeur moyenne 12.65 . . . .	133
13.2	comparaison entre le taux de formation de Madau et al., 1999 (pointillés) et celui de Hopkins et al., 2001 (trait plein) . . . . .	135
13.3	spectre de $\Omega_{gw}$ produit par la population cosmologique des pulsars pour des vitesses minimales de rotation de 0.5 ms (modèle 1) et 1 ms (modèle 2). Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. (pointillés) et de Hopkins et al. (trait plein) . . . . .	137
13.4	influence du paramètre ellipticité sur le spectre de $\Omega_{gw}$ pour une vitesse minimale de rotation de 0.5 ms avec le taux de formation d'étoiles de Hopkins et al. (modèle H1) . . . . .	138
13.5	schéma illustrant les conditions sous lesquelles une instabilité CFS se développe. Le mode est instable s'il est retrograde par rapport au fluide (gauche) mais prograde dans un repère extérieur (droite) . . . . .	140
13.6	vues polaire et équatoriale du champ de vitesse créée par le mode $r$ domi- nant $m = 1 = 2$ . . . . .	140

13.7	fenêtre d'instabilité des modes $r\ l = m = 2$ . . . . .	142
13.8	évolution des modes $r\ l = m = 2$ dans le plan (vitesse de rotation)- (température). Les pointillés représentent la fenêtre d'instabilité et la ligne fléchée la courbe d'évolution correspondant à une vitesse initiale Keplerienne . . . . .	143
13.9	spectre de $\Omega_{gw}$ produit par les modes $r$ ( $m = l = 2$ ) pour des étoiles de rayons 10 km (modèle 1) et 12.53 km (modèle 2). Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. (pointillés) et de Hopkins et al.(trait plein) . . . . .	148
13.10	spectre de $\Omega_{gw}$ produit par les modes $r$ pour les modèles de Ferrari et al., 1999 (trait plein) et de Owen et al., 1998 (pointillés) . . . . .	150
13.11	paramètre $\beta$ en fonction de la période pour des étoiles de rayons moyens 10 km (1) et 12.53 km (2) . . . . .	153
13.12	énergie libérée pendant la transition Maclaurin/Dedekind pour des étoiles de rayons moyens 10 km (1) et 12.53 km (2) . . . . .	154
13.13	fréquence maximale d'émission des modes barre en fonction de la période pour des étoiles de rayons moyens 10 km (1) et 12.53 km (2) . . . . .	155
13.14	spectre de $\Omega_{gw}$ produit par les modes barre pour des étoiles de rayons 10 km (modèle 1) et 12.53 km (modèle 2). Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. (pointillés) et de Hopkins et al.(trait plein) . . . . .	156
13.15	spectre de $\Omega_{gw}$ produit par la population cosmologique des systèmes doubles d'étoiles à neutrons. Les nominations M ou H font respectivement référence aux taux de formation d'étoiles de Madau et al. (pointillés) et de Hopkins et al.(trait plein) . . . . .	163
13.16	les différentes contributions d'origine astrophysique dans le cas le plus optimiste (taux de formation stellaire de Hopkins et al. et fréquences de coupure élevées), et leur somme. . . . .	164
13.17	les différentes contributions d'origine astrophysique dans le cas le plus pessimiste (taux de formation stellaire de Madau et al. et fréquences de coupure basses), et leur somme . . . . .	165
14.1	LIGO/LIGO . . . . .	172
14.2	VIRGO/LIGO LA . . . . .	172
14.3	VIRGO/LIGO WA . . . . .	172
14.4	VIRGO/GEO . . . . .	173
14.5	VIRGO/TAMA . . . . .	173
14.6	ajustements des courbes de sensibilité des interféromètres terrestres . . .	175



# Annexe A

## Corrélations : Angles d'orientations

Le tableau A1 (Maggiore, 2000 [79]) donne les paramètres de localisation et d'orientation des principaux interféromètres terrestres : la latitude  $b$ , la longitude  $l$ , et l'orientation  $\varsigma$  de la bissectrice des deux bras par rapport à la direction Nord locale.

Calculons les paramètres d'orientation qui interviennent dans l'expression de la ORF donnée par Flanagan (1993) [35] :

- $\beta$  est l'angle au centre de la Terre entre les deux détecteurs.

Soit  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  les normales à la Terre en  $p_1$  (position du 1<sup>o</sup> détecteur) et  $p_2$  (position du 2<sup>o</sup> détecteur)

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \cos \beta$$

- les angles  $\delta$  et  $\Delta$  définis modulo  $90^\circ$  par :

$$\delta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{ et } \Delta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

interféromètre	$b(^{\circ})$	$l(^{\circ})$	$\varsigma(^{\circ})$
VIRGO	43.63	10.5	26.5
GEO	52.25	9.81	338.78
LIGO LA	30.56	-90.77	153
LIGO WA	46.45	-119.41	81.8
TAMA	35.68	139.54	135

TAB. A.1: paramètres de localisation et d'orientation des interféromètres terrestres

où  $\sigma_1$  ( $\sigma_2$ ) est l'angle entre la bissectrice des deux bras de l'interféromètre 1 (l'interféromètre 2) et la direction joignant les deux interféromètres.

Soit  $P_1 (x_1, y_1)$  le plan tangent à la Terre en  $p_1$  où  $x_1$  est dirigé vers le Nord.

$b_i$  et  $l_i$  sont respectivement la latitude et la longitude de l'interféromètre i.

$$x_1 = \begin{pmatrix} -\sin b_1 \cos l_1 \\ -\sin b_1 \sin l_1 \\ \cos b_1 \end{pmatrix} \quad y_1 = \begin{pmatrix} \sin l_1 \\ -\cos l_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n_1 = \begin{pmatrix} \cos b_1 \cos l_1 \\ \cos b_1 \sin l_1 \\ \sin b_1 \end{pmatrix}$$

La direction ( $p_1 p_2$ ) entre les deux interféromètres est donnée par :

$$l = \begin{pmatrix} \cos b_2 \cos l_2 - \cos b_1 \cos l_1 \\ \cos b_2 \sin l_2 - \cos b_1 \sin l_1 \\ \sin b_2 - \sin b_1 \end{pmatrix}$$

Sa projection dans  $P_1 (x_1, y_1)$  est  $l_{p1} = \begin{pmatrix} l_{p1} \cdot x_1 \\ l_{p1} \cdot y_1 \end{pmatrix} = \|l_{p1}\| \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix}$   
et donc,

$$\sigma_1 = \xi_1 - \theta_1$$

Le calcul de  $\sigma_2$  se fait de façon similaire.

– La distance  $d$  entre les deux interféromètres s'écrit en fonction du rayon de la Terre,

$$L = R * \|l_{p1}\|$$